

**Zeszyty Naukowe Instytutu Zarządzania i Marketingu  
Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie**

**PRAGMATA  
TES  
OIKONOMIAS**

**III**

**Redakcja naukowa  
Marek Kulesza, Walenty Ostasiewicz**



**Częstochowa 2009**

Recenzenci  
Maria Jadamus-Hacura  
Krystyna Mielich-Iwanek  
Zdzisław Pisz  
Stanisław Heilpern

Redaktorzy naukowi  
Marek Kulesza, Walenty Ostasiewicz

Redaktor  
Przemysław Lasota

Korekta  
Dariusz Jaworski

Redakcja techniczna  
Piotr Gospodarek

Projekt okładki  
Sławomir Sadowski

© Copyright by Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie  
Częstochowa 2009

**ISBN 978-83-7455-125-0**  
**ISSN 1899-2706**

Wydawnictwo Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie  
42–200 Częstochowa, ul. Waszyngtona 4/8  
tel. (0-34) 378-43-29, faks (0-34) 378-43-19  
[www.ajd.czyst.pl](http://www.ajd.czyst.pl)  
e-mail: [wydawnictwo@ajd.czyst.pl](mailto:wydawnictwo@ajd.czyst.pl)

## Spis treści

Przedmowa .....	5
Walenty Ostasiewicz Rozkłady ucięte .....	7
Paulina Ucieklak-Jeż, Marek Kulesza Jakość życia w krajach Unii Europejskiej w świetle danych społecznych i ekonomicznych .....	15
Stanisława Ostasiewicz Ocena prawdopodobieństwa przeżycia dla danych niepełnych .....	29
Paulina Ucieklak-Jeż Uwagi na temat metod pomiaru nierówności zdrowotnej i sprawiedliwości w finansowaniu opieki zdrowotnej .....	41
Ewa Bitner Menedżment w prywatyzowanych przedsiębiorstwach w Polsce .....	55
Sylvia Akuła Ceny mieszkań we Wrocławiu w latach 2000–2006 według rodzajów sprzedaży i podmiotów oferentów .....	73
Agnieszka Widawska-Stanisz, Izabella Sowier-Kasprzyk Promocja gminy jako element marketingu terytorialnego .....	89
Roman Garbiec Emerytury górnicze w polskim systemie emerytalnym .....	97
Roman Pluta Uwarunkowania decyzji dotyczących koszyka podstawowych świadczeń zdrowotnych .....	115
Jan Szczepanik Czynniki motywacji pozafinansowej pracowników w przedsiębiorstwach zróżnicowanych pod względem wielkości .....	135
Elżbieta Stańczyk Kapitał ludzki w województwach południowych na tle pozostałych województw w latach 2003–2006 .....	151

Witold Miszczak, Walenty Ostasiewicz Mieszanki rozkładów .....	187
Agnieszka Pilis, Marek Szambelan, Wiesław Pilis, Tomasz Pilis Wizerunek współpracowników ubezpieczeń na życie firmy pośrednictwa ubezpieczeniowego Financial Marketing Group International S.A. ....	215
Edyta Mazurek, Marek Kośny Assessment of Optimal Bandwidth in Decomposition of Redistribution Coefficient .....	233
Edyta Mazurek A Note of the Identification of the Bandwith for the Potential Redistribution Index Evaluation .....	247
Mauro Mussini, Biancamaria Zavanella Choosing the Bandwith for Decomposing the Redistributive Effect: Evidence from Milan Using AMeRiCA Data .....	253
Petr Mazouch, Savina Finardi, Jakub Fischer Increasing Level of Education in Selected Central European Countries: a Certain Advantage .....	275

## **Przedmowa**

Niniejszy trzeci numer prac naukowych przygotowywanych przez Instytut Zarządzania i Marketingu zawiera oprócz artykułów w języku polskim, dotyczących tradycyjnych zagadnień statystyczno-ekonomicznych, także artykuły – zarówno autorów polskich, jak i zagranicznych – dotyczące zagadnień aktualnie szeroko diskutowanych na forum Unii Europejskiej. W szczególności dotyczy to zagadnień sprawiedliwości społecznej i redystrybucyjnej roli państwa dobrobytu.

Dziękujemy Recenzentom – Pani dr Marii Jadamus-Hacurze, Pani dr Krysztynie Melich-Iwanek, Panu prof. Zdzisławowi Piszowi, Panu prof. Stanisławowi Heilpernowi za ich wnikliwe i życzliwe recenzje, dzięki którym udało się nie tylko usunąć błędy, ale też w wielu przypadkach ulepszyć jakość prezentacji i wywodów. Z wdzięcznością odnotowujemy ogromne zaangażowanie Pani Pauliny Ucieklak-Jeż, jakie wykazywała na każdym etapie przygotowywania niniejszego zeszytu do druku.



Walenty Ostasiewicz

## Rozkłady ucięte

### 1. Wstęp

Pojęcie „rozkład ucięty” ma dwa różne znaczenia. Rozpocznijmy od pierwszego z nich. Rozpatrzmy przypadek nieco uproszczony, ale mający duże zastosowanie w teorii ubezpieczeń.

Załóżmy, że zmienna losowa  $X$  określana jest za pomocą dystrybuanty  $F_X$ . Zdefiniujmy nową „uciętą” zmienną losową  $X^R$ .

$$X^R = \begin{cases} X, & \text{jeśli } X > a \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Rozkład zmiennej  $X^R$  nazywa się rozkładem uciętym. Dystrybuantę tej zmiennej losowej określa się według wzoru:

$$F_{X^R}(y) = \frac{F_X(y) - F_X(a)}{1 - F_X(a)}. \quad (1)$$

W przypadku tym wszystkie realizacje zmiennej losowej  $X$  są obserwowalne. Z punktu widzenia teoretycznego nie ma żadnego problemu z estymacją parametrów obu rozkładów.

Drugie znaczenie pojęcia „rozkład ucięty” dotyczy przypadku, gdy niektóre realizacje nie są obserwowalne i właśnie one nazywane są realizacjami uciętymi.

Jeżeli symbolem  $p(x, \theta)$  oznaczymy funkcję gęstości zmiennej losowej ciągłej lub funkcję rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej i przyjmiemy, że obserwacje zmiennej losowej  $X$  należą do pewnego obszaru  $T$  będącego podzbiorem przestrzeni prób, to funkcję gęstości zmiennej losowej uciętej  $X^T$  określa się ze wzoru (por. [1]):

$$p^T(x, \theta) = \frac{w(x, T) \cdot p(x, \theta)}{u(T, \theta)} \quad (2)$$

gdzie

$$w(x, T) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in T \\ 0, & \text{jeśli } x \notin T \end{cases}$$

$$u(T, \theta) = E(w(X, T))$$

W przypadku tego typu rozkładów jednym z głównych problemów jest estymacja parametrów na podstawie brakujących danych.

Weźmy na przykład taką wielkość losową jak liczba przejazdów bez biletu środkami komunikacji miejskiej przypadająca na jedną osobę. „Obserwacji” w tym przypadku dokonują kontrolerzy. Można ewidencjonować, ile osób zostało raz ukaranych, ile osób zostało dwa razy ukaranych itd., ale nie wiemy, ile osób nie zostało ukaranych, mimo że jechały bez opłaty. Liczba osób, które jeżdżą bez opłaty, nie jest przecież rejestrowana.

Niżej wymienione są inne przykłady tego typu:

- Liczba osób na jedno gospodarstwo domowe, które zachorowały na określoną chorobę zakaźną, nie wiemy zaś, ile osób nie zachorowało.
- Liczba wypadków przy pracy przypadająca na jednego zatrudnionego, w określonej jednostce czasu. Gdyby liczba pracujących była stała w tym czasie, to można by łatwo obliczyć zdarzenie „zero wypadków”.
- Częstość występowania słów w tekście określonego autora. Można ustalić, które słowo zostało tylko raz użyte, które dwa razy itd., ale nie można ustalić, które słowo nie zostało ani razu użyte mimo, iż jest ono znane autorowi. Gdyby były znane wszystkie słowa dostępne danemu autorowi, to łatwo by można określić częstość zdarzenia „słowo nieużywane”.
- Liczba jaj znoszonych przez pewien gatunek owadów.
- Liczba jednoczesnych odkryć naukowych.

## 2. Rozkład dwumianowy

Zmienną losową  $X$  o rozkładzie dwumianowym określa następujący rozkład:

$$p_i = P(X = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Załóżmy, że zdarzenie „zero” nie jest obserwowalne, mimo iż ono się realizuje.

Ucięty rozkład dwumianowy, bez zdarzenia „ $X = 0$ ”, określa się następująco:

$$p_i^T = P(X^T = i) = \frac{C_n^i p^i (1-p)^{n-i}}{1 - (1-p)^n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



Zauważmy, że

$$E(X^T) = \frac{n \cdot p}{1 - (1 - p)^n}$$

oraz

$$E\left(\frac{X^T}{n}\right) = \frac{p}{1 - (1 - p)^n}.$$

Czyli

$$E(X) < E(X^T)$$

oraz

$$E(X/n) < E(X^T/n)$$

Ponieważ ucięty rozkład dwumianowy zależy od jednego parametru  $p$ , to problem polega na jego estymacji.

Trudność problemu polega na tym, że nie mając możliwości obserwacji częstości zdarzenia „ $X = 0$ ”, nie znamy też liczby wszystkich obserwacji. Nieznaną liczbę obserwacji oznaczmy symbolem  $N$  zaś obserwowane częstości jako  $f_0, f_1, \dots, f_n$ , spełniające następującą równość:

$$f_0 + f_1 + \dots + f_n = N.$$

Wielkość  $N$  jest nieznaną, ponieważ częstość  $f_0$  występowania zdarzenia „ $X=0$ ” nie jest znana.

Rozpatrzmy przypadek ogólniejszy, gdy nieobserwowalnych jest  $k$  kolejnych zdarzeń

$$\text{„}X = 0\text{”, „}X = 1\text{”, „} \dots \text{”, „}X = k - 1\text{”}.$$

Gdy ucięte jest jedno zdarzenie, to mamy  $k=1$ , natomiast  $k=2$  oznacza nieobserwowalność zdarzeń „ $X=0$ ” oraz „ $X=1$ ”.

Wiadomo, że ogólną metodą estymacji parametrów jest metoda największej wiarygodności. W przypadku „normalnego” rozkładu dwumianowego zastosowanie tej metody jest wyjątkowo łatwe i służy ona niemal wzorcowym przykładem w większości podręczników ze statystyki.

W przypadku uciętych rozkładów metoda ta jest o wiele bardziej skomplikowana.

W przypadku rozkładu dwumianowego, gdy uciętych jest  $k$  najmniejszych wartości, w celu estymacji parametru  $p$  metodą największej wiarygodności należy rozwiązać następujące równanie względem niewiadomej  $p$  (por. [2, 3]):

$$A_k = \frac{np - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!i}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}}$$

gdzie

$A_k$  jest to empiryczny moment rzędu pierwszego obliczony dla danych uciętych.

W przypadku gdy ucięta jest tylko wartość zerowa, równanie to ma następującą postać:

$$\frac{\sum_{i=1}^n i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{np}{1 - (1-p)^n}.$$

Metoda prostsza rachunkowa jest przedstawiona w pracy [2, 3]. A mianowicie estymator  $\hat{p}$  parametru  $p$ , gdy nie są obserwowalne  $k$  pierwsze wartości, dany jest za pomocą wzoru:

$$\hat{p} = \frac{T_2 - k \cdot T_1}{(n-1)T_1 - (k-1)n \cdot T_0}$$

gdzie

$$T_0 = \sum_{i=k}^n f_i, \quad T_1 = \sum_{i=k}^n i \cdot f_i, \quad T_2 = \sum_{i=k}^n i^2 \cdot f_i$$

Nieznana wielkość  $N$  oblicza się wówczas, rozwiązując następujące równanie (por. [2]):

$$N - T_0 = N \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}$$

Różnice między estymatorami uzyskanymi za pomocą obu metod są bardzo małe.

Podobną metodę stosuje się do estymacji parametru  $\lambda$  w uciętym rozkładzie Poissona.

Gdy uciętych jest  $k$  pierwszych wartości, to wzór określający estymator parametru  $\lambda$  jest następujący (por. [2]):

$$\hat{\lambda} = \frac{T_2 - k \cdot T_1}{T_1 - (k-1)T_0}$$

gdzie

$$T_0 = \sum_{i=k}^{\infty} f_i, \quad T_1 = \sum_{i=k}^{\infty} i \cdot f_i, \quad T_2 = \sum_{i=k}^{\infty} i^2 f_i$$

Nieznaną wielkość  $N$  określa się, rozwiązując następujące równanie:

$$T_1 - \lambda T_0 = \frac{N e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!}.$$

Badania wykazały, że efektywność tego estymatora jest dość wysoka, przy czym wraz ze wzrostem wartości parametru  $\lambda$  wzrasta do 100% (por. [3]).

### 3. Gdzie umieszczać uciętą masę prawdopodobieństwa?

W celu sprecyzowania pytania postawionego w tytule, rozpatrzmy prosty przykład.

Weźmy zmienną losową  $X \sim B(4, \frac{1}{2})$ .

Łatwo obliczamy jej rozkład

i	0	1	2	3	4
$P(X=i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Założmy, że dwie pierwsze wartości są ucięte. Obserwujemy więc tylko częstości  $f_2 = P(X=2)$ ,  $f_3 = P(X=3)$ ,  $f_4 = P(X=4)$ .

Aby określić ucięty rozkład dwumianowy, trzeba określić prawdopodobieństwa:

$$p_2^T P(X=2), \quad p_3^T P(X=3), \quad p_4^T P(X=4).$$

Zauważmy, że ucięta masa prawdopodobieństwa wynosi

$$u = P(X=0) + P(X=1).$$

W danym przypadku  $u = \frac{5}{16}$ .

Masą tą trzeba uzupełnić pozostałe wartości  $p_2, p_3$  i  $p_4$  tak, aby ucięty rozkład był rozkładem, tzn. aby  $p_2^T + p_3^T + p_4^T = 1$ .

Powstaje więc pytanie: które wartości prawdopodobieństw  $p_2, p_3$  i  $p_4$ , i w jakim stopniu, powinny być zwiększone?

Tradycyjnie, zgodnie ze wzorem (1), uciętą wartość  $u$  rozdziela się proporcjonalnie do wielkości  $p_2, p_3$  i  $p_4$ .

W danym przypadku mamy więc następujący rozkład:

$$p_2^T = p_2 \frac{1}{1-u} = p_2 \cdot \frac{16}{11} = \frac{6}{16} \cdot \frac{16}{11} = \frac{6}{11},$$

$$p_3^T = p_3 \frac{1}{1-u} = p_3 \cdot \frac{16}{11} = \frac{4}{16} \cdot \frac{16}{11} = \frac{4}{11},$$

$$p_4^T = p_4 \frac{1}{1-u} = p_4 \cdot \frac{16}{11} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{11} = \frac{1}{11},$$

Zamiast proporcjonalnie, moglibyśmy na przykład uciętą masę rozmieścić równomiernie:

$$p_2^T = p_2 + \frac{1}{3}u = \frac{6}{16} + \frac{5}{48} = \frac{23}{48}$$

$$p_3^T = p_3 + \frac{1}{3}u = \frac{4}{16} + \frac{5}{48} = \frac{17}{48}$$

$$p_4^T = p_4 + \frac{1}{3}u = \frac{1}{16} + \frac{5}{48} = \frac{8}{48}$$

W. Miszczak proponuje zaś „załamywać” rozkład i po „zawinięciu” części odciętej na część pozostałą dodać odpowiednie masy prawdopodobieństwa, tak jak to niżej pokazano.

$$p_2^T = p_2 + p_1 = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16}$$

$$p_3^T = p_3 + p_0 = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$p_4^T = p_4 + 0 = \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{16}$$

Problem wyboru jednego z możliwych wariantów, i jego uzasadnienia, nie był prawdopodobnie dotychczas rozpatrywany.

## Literatura

- [1] Rao C.R., *Statystyka i prawda*, PWN, Warszawa 1994.
- [2] Rider P.R., *Truncated Poisson distributions*, JASA, 48, 1953, 826–830.
- [3] Rider P.R., *Truncated Binomial and Negative Binomial Distributions*, JASA, 50, 1955, 877–883.
- [4] Ostasiewicz W., *Propedeutyka probabilistyki*, AE, Wrocław 2000.

## Summary

### Truncated Distributions

The paper highlights two basic definitions of truncated distributions. There are discussed various type of truncation of binomial distribution, as well as are defined some open problems.



Paulina Ucieklak-Jeż  
Marek Kulesza

## **Jakość życia w krajach Unii Europejskiej w świetle danych społecznych i ekonomicznych**

### **1. Wstęp**

Jakość życia (*Quality of Life*) jest pojęciem interdyscyplinarnym i jest w obszarze zainteresowań filozofii, socjologii, psychologii, ekonomii, medycyny, marketingu i zarządzania (por. [6]). Badania nad wskaźnikami społecznymi zapoczątkowane zostały w latach sześćdziesiątych w Stanach Zjednoczonych. Podczas wspólnego projektu badawczego zorganizowanego przez NASA i American Academy of Arts and Science, którego celem była ocena skutków społecznych badań kosmicznych, zauważono, że brakuje odpowiednich pojęć i metodologii pomiaru badań społecznych. Raymond Bauer, dyrektor projektu, zaproponował nazwę i ideę wskaźników społecznych. Według jego definicji wskaźniki społeczne były: „[...] danymi statystycznymi, szeregami czasowymi lub innymi formami ewidencji, pozwalającymi oszacować, jak wiele nam jeszcze brakuje do osiągnięcia naszych wartości i celów”.

W 1969 roku w dokumencie *Toward Social Report* opracowanym przez US Department of Health, Education and Welfare zidentyfikowano kluczowe wskaźniki społeczne umożliwiające opis rzeczywistości w różnych sferach życia społecznego tj. zdrowia i choroby, dochodu i ubóstwa, środowiska fizycznego, porządku publicznego i bezpieczeństwa, mobilności społecznej, uczenia się, nauki i sztuki, udziału w życiu społecznym i alienacji, które mogą być opisywane przez wskaźniki (por. [4, 6]). Wskaźniki społeczne stały się więc syntetycznymi miarami liczbowymi charakteryzującymi różne przejawy życia społecznego. Zgodnie z metodologią opisu i badań, wskaźniki społeczne dzielimy na dwie kategorie: wskaźniki subiektywne, wskaźniki obiektywne.

Wskaźnikami subiektywnymi nazywamy wskaźniki społeczne oparte na odczuciach osobistych, preferencjach, stosunku do danej rzeczy lub osoby, opiniach, sądach lub różnego rodzaju przekonaniach. Natomiast wskaźnikami

obiektywnymi nazywamy wskaźniki odpowiadające rzeczom stosunkowo łatwo obserwowalnym i mierzalnym. Wskaźniki obiektywne nie zależą od odczuć ludzi, a dane do obliczenia tych wskaźników pochodzą ze spisów i urzędowych rejestrów (por. [7]). Koncepcja jakości życia w ekonomii pojawia się jako ekonomia dobrobytu (*welfare economics*), w której produkt krajowy brutto lub PKB *per capita* są miarami dobrobytu ekonomicznego (*economic well-being*), a nawet postępu społecznego. Brytyjski ekonomista A.C. Pigou wprowadził szersze pojęcie „społecznego” dobrobytu (*social welfare*), którego jednym ze składników jest dobrobyt ekonomiczny (por. [7]). Według psychologów pomiar subiektywnego dobrostanu (SWB – *Subjective Well-Being*) lub szczęścia (*happiness*) można uważać za subiektywną miarę jakości życia (por. [7]). Powszechnie akceptuje się, że jakość życia może być analizowana z wykorzystaniem trzech metodologicznych i teoretycznych podejść: ekonomicznego, społecznego i subiektywnego, co pociąga za sobą powstanie szeregu wskaźników (ekonomicznych, społecznych i subiektywnych) (por. [3]). Wskaźniki te mogą być ze sobą łączone według uznania autorów wskaźnika, w celu otrzymania łącznego wskaźnika (*summary indices*) służącego jako miara jakości życia (por. [1]).

W artykule wybraliśmy dostępne dla 27 państw Unii Europejskiej wskaźniki obiektywne i subiektywne z roku 2000 i roku 2005, przedstawiliśmy ranking państw według badanych zmiennych. Za pomocą współczynnika rang zbadaliśmy, czy istnieją zależności między PKB *per capita* ocenianych krajów i analizowanymi wskaźnikami służącymi do oceny jakości życia.

## **2. Produkt krajowy brutto i wskaźniki przyjmujące za podstawę dochód narodowy**

Idea jakości życia ma istotne znaczenie w historii ekonomii. A.C. Pigou uważa dochód narodowy za podstawową miarę dobrobytu ekonomicznego. W swoich pracach A.C. Pigou rozróżnia pojęcie dobrobytu ekonomicznego od szerszego pojęcia „społecznego” dobrobytu, którego składnikiem jest dobrobyt ekonomiczny. Jego pogląd „o istnieniu jasnej przesłanki, że zmiany dobrobytu ekonomicznego pociągają za sobą zmiany dobrobytu społecznego w tym samym kierunku, jeśli nawet nie w tym samym stopniu” jest wciąż aktualny wśród ekonomistów (por. [7]). Podstawowe prace nad pomiarem dochodu narodowego wykonał Simon Kuznets, trzeci laureat Nagrody Nobla z dziedziny ekonomii. Po wdrożeniu programu badawczego sponsorowanego przez National Bureau of Economic Research dotyczącego dochodu narodowego, Simon Kuznets odegrał wiodącą rolę w opracowaniu oficjalnego sposobu pomiaru dochodu narodowego w Stanach Zjednoczonych Ameryki. Ostatecznie powstał doskonały przez lata



system rachunków narodowych, zaaprobowany przez inne kraje, a także przez Biuro Statystyczne Organizacji Narodów Zjednoczonych. Wkrótce produkt krajowy brutto czy produkt narodowy brutto zaczęto uważać za miarę dobrobytu ekonomicznego. Na początku lat 70. William Nordhaus i James Tobin zaproponowali nową miarę dobrobytu ekonomicznego – MEW (*Measure of Economic Welfare*), powstałą przez dodanie do produktu narodowego brutto nowych aspektów. Do aspektów zwiększających wskaźnik należą:

- wartość pieniężna pracy własnej (niezarobkowych zajęć produkcyjnych) w gospodarstwie domowym, zwanej też konsumpcją naturalną, polegającą między innymi na wypieraniu usług rynkowych przez samoobsługę w gospodarstwie domowym;
- wartość pieniężna czasu wolnego, traktowanego jako alternatywa czasu poświęconego na pracę.

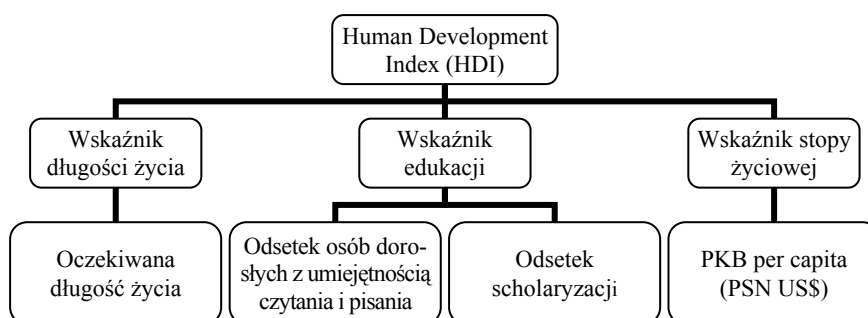
Do aspektów zmniejszających wskaźnik należy:

- wartość zanieczyszczenia środowiska naturalnego,
- wartościowy efekt rentowy wynikający z użytkowania mieszkania lub nagromadzonych dóbr trwałych.

Wskaźnikiem, który różni się od MEW (*Measure of Economic Welfare*) tym, że uwzględnia „ważną” konsumpcję indywidualną, spowodowaną nierównością dochodów w społeczeństwie, kosztami zmian klimatycznych, kosztami strat w kapitale przyrodniczym, w tym stratami spowodowanymi efektem cieplarnianym i kurczeniem się warstwy ozonowej, jest wskaźnik trwałego dobrobytu ekonomicznego (*Index of Sustainable Economic Welfare*). W mierniku tym nie uwzględnia się jednak wartości czasu wolnego (por. [7]). Składowe i wagi tych miar zależą z reguły od subiektywnego podejścia badaczy. Równolegle toczyły się prace nad rozwojem alternatywnych wskaźników. M.K. Bennett porównywał różnice w poziomach konsumpcji, wprowadzając 16 wskaźników opisujących pięć kategorii konsumpcji: żywności i tytoniu, usług medycznych i sanitarnych, domowych, edukacji i rekreacji, transportowych i komunikacyjnych. W 1979 roku David Morris zaproponował fizyczny indeks jakości życia (*physical QOL index*) (por. [7]), który jest kombinacją produkcji ekonomicznej, oczekiwanej długości życia i edukacji. Indeks ten stał się prekursorem dzisiejszego HDI (*Human Development Index*) publikowanego corocznie w raportach Organizacji Narodów Zjednoczonych, United Nations Human Development Report (por. [7]).

### 3. Wskaźnik rozwoju społecznego (Human Development Index)

Wskaźnik rozwoju społecznego HDI (*Human Development Index*) jest najlepiej znaną miarą rozwoju społecznego. Indeks opracowany w UNDP (United Nations Development Programme) jest złożonym indeksem dobrobytu społecznego i ekonomicznego. Po raz pierwszy obliczono i opublikowano go w roku 1990. Aspekty wskaźnika HDI (*Human Development Index*) podane są na rysunku 1.



Rys. 1. Aspekty wskaźnika HDI

Wskaźnik *Human Development Index* (HDI) jest miernikiem opartym na:

- długości życia, mierzonej przeciętnym dalszym trwaniem życia noworodka  $e_x$  *Life Expectancy Index* LEI:

$$LEI = \frac{e_x - 25}{85 - 25} \quad (1)$$

gdzie:

- $e_x$  – przeciętne dalsze trwanie życia noworodka *Life Expectancy at birth*, 25 i 85 to przyjęte dolna i górna wartość progowa tego miernika ( $e_x$ ).
- wykształceniu, mierzonym za pomocą odsetka osób dorosłych umiejących czytać oraz odsetka scholaryzacji na poziomie podstawowym, średnim i wyższym:

$$EI = \frac{2}{3} \times ALI + \frac{1}{3} \times EI, \quad (2)$$

gdzie

$$ALI = \frac{ALR - 0}{100 - 0}, \quad (3)$$

$$EI = \frac{ER - 0}{100 - 0}, \quad (4)$$

czyli

ALR – odsetek osób dorosłych umiejących czytać, *Adult literacy rate (ages 15 and older)*;

CGER – odsetek scholaryzacji na poziomie podstawowym, średnim i wyższym, *Combined gross enrollment ratio for primary, secondary and tertiary schools*, 0 i 100 – wartości progowe miernika;

— stopie życiowej, mierzonej wartością PKB na 1 mieszkańca, wyrażonej w dolarach USA według parytetu siły nabywczej

$$GDPI = \frac{\log(GDPpc) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}, \quad (5)$$

gdzie:

GDPpc – PKB *per capita* w dolarach USA według parytetu siły nabywczej *GDP per capita at PPP in USD*.

Wskaźnik HDI zdefiniowany jest jako nieważona średnia arytmetyczna trzech wskaźników:

$$HDI = \frac{1}{3}(LEI + EI + GDPI) \quad (6)$$

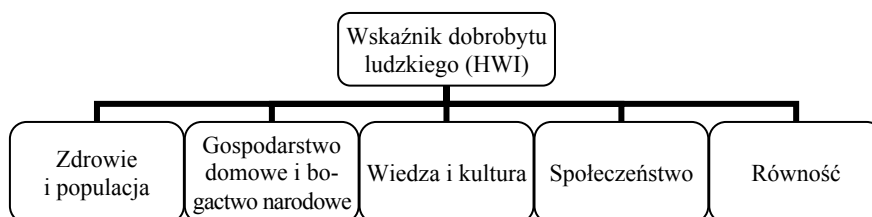
*Human Development Index* (HDI) mierzy osiągnięcia poszczególnych krajów w zakresie rozwoju i dobrobytu ludności. Został on zaproponowany przez ONZ dla lepszego zobrazowania osiągnięć poszczególnych państw w zakresie poprawy życia obywateli, monitorowania realizacji celów przyjętych w Programie Rozwoju Narodów Zjednoczonych (United Nations Development Program UNDP) oraz identyfikacji problemów wymagających interwencji międzynarodowych.

Źródło: opracowanie własne na podstawie [8].

#### 4. Wskaźnik dobrobytu ludzkiego (*Human Well-being Index*)

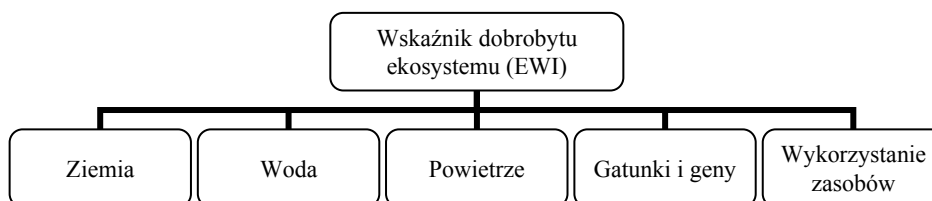
W książce pt. *The Wellbeing of Nations* Robert Prescott opisał metodę oceny dobrobytu, używając skonstruowanego zintegrowanego wskaźnika, który łączy wskaźniki zrównoważonego rozwoju ze wskaźnikami dobrobytu ekonomicznego i społecznego. Robert Prescott podzielił różne przejawy życia społecznego i podał kilka wskaźników, tj.: indeks dobrobytu człowieka HWI (*Human Well-being Index*), indeks dobrobytu ekosystemu EWI (*Ecosystem Well-being Index*),

indeks dobrobytu WI (*Well-being Index*) i stosunek dobrobytu człowieka do stresu ekosystemu WSI (*Well-being/Stress Index*) (por. [5]). Wskaźniki te skupiają się na zrównoważonym rozwoju, a główną ideą jest to, że indeks dobrobytu ekonomicznego i społecznego musi również uwzględniać środowiskowe koszty aktywności ludzkiej. Indeks dobrobytu WI (*Well-being Index*) jest średnią arytmetyczną wartości indeksu HWI (*Human Well-being Index*) i wartości indeksu EWI (*Ecosystem Well-being Index*). Wskaźnik HWI (*Human Well-being Index*) zawiera pięć aspektów: zdrowie i populacja, gospodarstwo domowe i bogactwo narodowe, wiedza i kultura, społeczeństwo (swoboda, rządzenie, pokój i porządek), równość (gospodarstw domowych i płci). Oparte są one na 36 wskaźnikach opisujących warunki społeczno-ekonomiczne. Natomiast aspektami wskaźnika dobrobytu ekosystemu są: ziemia (jej różnorodność i jakość), woda (śródlądowa i morska), powietrze (jakość powietrza lokalnego, globalna atmosfera), gatunki (dzikie i udomowione) i geny, wykorzystanie zasobów (energia, materiały i sektor zasobów). Indeks ten oparty jest na 51 wskaźnikach stanu środowiska. W publikacji *The Well-being of Nations* zebrane i omówione są dane dla 180 krajów.



**Rys.2.** Aspekty wskaźnika dobrobytu ludzkiego

Źródło: opracowanie własne na podstawie [5]



**Rys. 3.** Wymiary wskaźnika dobrobytu ekosystemu

Źródło: opracowanie własne na podstawie [5]

## 5. Oczekiwana długość życia w szczęściu (*Happy Life Expectancy*)

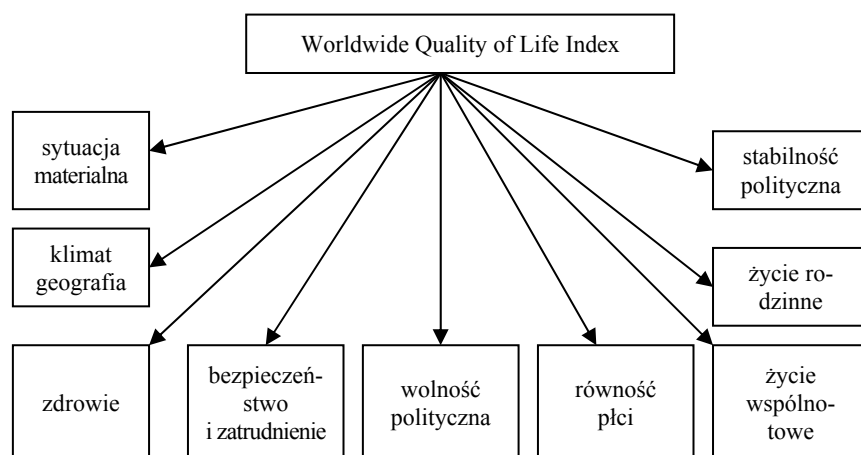
Przykładem połączenia obiektywnych i subiektywnych danych w jeden wskaźnik jest oczekiwana długość życia w szczęściu (*Happy Life Expectancy*). Jak długo i szczęśliwie żyją ludzie w poszczególnych populacjach, może być określone przy wykorzystaniu dwóch źródeł informacji: przeciętnej szczęśliwości – szacowanej na podstawie sondaży populacji, i oczekiwanej długości życia – na podstawie rejestrów cywilnych. Szczęśliwość jest mierzona na podstawie odpowiedzi na pytanie z sondażu. Na przykład respondent odpowiada na pytanie:

„Biorąc wszystko pod uwagę, czy jesteś obecnie szczęśliwy ze swojego całego dotychczasowego życia?”

Odpowiedź jest szacowana na dziesięciopunktowej skali, gdzie 1 – oznacza że „nie jestem szczęśliwy”, a 10 – oznacza „jestem szczęśliwy”. Porównywalne dane o przeciętnej szczęśliwości są zebrane w World Database of Happiness; w sekcji „Happiness in Nations” (por. [10]). Oczekiwana długość życia w szczęściu HLY (*Happy Life Years*) oblicza się, mnożąc oczekiwaną długość życia przez szczęśliwość wyrażoną na skali od 0 do 1 (por. [10]).

## 6. Wskaźnik jakości życia opracowany przez tygodnik „The Economist”

The Economist Intelligence Unit opracował nowy wskaźnik jakości życia Worldwide Quality of Life Index oparty na unikatowej metodologii, która łączy rezultaty ankietowania subiektywnej satysfakcji życiowej z obiektywnymi czynnikami jakości życia w różnych krajach (por. [10]). Badanie jakości życia wskaźnikiem Worldwide Quality of Life Index zostało przeprowadzone w 2005 roku. Wskaźnik Worldwide Quality of Life Index został policzony dla 111 krajów. Aspekty jakości życia poddane ocenie przedstawione są na rysunku nr 4.



Rys. 4. Aspekty wskaźnika Worldwide Quality of Life Index

Źródło: opracowanie własne na podstawie [11]

Sytuację materialną określa wartość PKB *per capita*, liczona metodą parytetu siły nabywczej w USD. Dane dotyczące klimatu i geografii pochodzą z CIA World Factbook, dla porównania podawana jest szerokość geograficzna, występujący klimat (gorącym lub zimny) w badanym kraju. Natomiast oczekiwana długość życia jest wskaźnikiem oceny zdrowia badanej populacji, a stopa bezrobocia wyrażona w procentach jest przyjęta do pomiaru Worldwide Quality of Life Index jako wskaźnik bezpieczeństwa zatrudnienia. Dane dotyczące wolności politycznej pochodzą z Freedom House, gdzie przyjęto skalę od 1 „całkowicie wolny” do 7 „bez wolności”. Natomiast równość płci określa proporcja przeciętnych zarobków mężczyzn i kobiet, która była publikowana w raporcie UNDP Human Development Report. Wskaźnik osób uczęszczających do kościoła lub wskaźnik członkostwa w związkach zawodowych jest przyjęty do pomiaru Worldwide Quality of Life Index jako wskaźnik życia wspólnotowego. Dane dotyczące życia wspólnotowego pochodzą z MOP; World Values Survey. Natomiast dane dotyczące życia rodzinnego pochodzą z ONZ; Euromonitor. Do pomiaru Worldwide Quality of Life Index stabilności życia rodzinnego przyjęto wskaźnik rozwodów na 1000 mieszkańców, wyrażony w skali od 1 „najniższy” wskaźnik rozwodów do 5 „najwyższy” wskaźnik rozwodów. Natomiast dane dotyczące stabilności politycznej i bezpieczeństwa są zebrane i opracowane przez Economist Intelligence Unit.

## 7. Satysfakcja z życia (*Life satisfaction*)

Europejska Fundacja na rzecz Poprawy Warunków Życia i Pracy (*The European Foundation for Improvement of Living and Working Conditions*), działająca w Unii Europejskiej, została zobowiązana do uzyskania obszernych i porównywalnych informacji o tym, jak Europejczycy oceniają swoje warunki życia i pracy. Fundacja przeprowadziła sondaż *First European Quality of Life Survey* w 28 krajach (w 27 obecnych krajach członkowskich i jednym kraju kandydackim – Turcji). Celem reprezentacyjnego ankietowego badania była analiza wpływu różnych czynników życiowych na europejską jakość życia. W europejskim sondażu jakości życia EQLS (*European Quality of Life Survey*) subiektywny dobrostan (*well-being*) był mierzony przy pomocy dwóch wskaźników. Pierwszym wskaźnikiem jest satysfakcja z życia, która daje bardziej poznawczą (percepcyjną) ocenę jakości życia. Drugim wskaźnikiem – ogólna szczęśliwość, która pozwala na bardziej emocjonalną ocenę życia. Dwa pytania w europejskim sondażu jakości życia badają satysfakcję z życia i ogólną szczęśliwość. Pierwsze z pytań brzmi: „Biorąc wszystko pod uwagę, jak bardzo jesteś obecnie usatysfakcjonowany z życia?”, a drugie pytanie: „Biorąc wszystko pod uwagę, jak bardzo jesteś szczęśliwy?”. Odpowiedzi na te dwa pytania mierzone są na 10-punktowej skali, na której 1 znaczy „bardzo nie usatysfakcjonowany” i „bardzo nieszczęśliwy”, natomiast 10 znaczy „bardzo usatysfakcjonowany” i „bardzo szczęśliwy” (por. [2]).

## 8. Ranking państw należących do Unii Europejskiej, według zmiennych Y i X

Dane, na których oparto rozważania, pochodzą z 2000 i 2005 roku i zostały zaczerpnięte z różnych źródeł.

Poniżej podano dostępne wskaźniki służące do oceny jakości życia w 2000 roku w krajach Unii Europejskiej:

$Y_{2000}$  – Produkt krajowy brutto *per capita*,

$X_1$  – Human Development Index,

$X_2$  – Human Wellbeing Index,

$X_3$  – Happy Life Years.

**Tabela 1.** Ranking państw Unii Europejskiej w 2000 roku według badanych zmiennych

Lp.	$Y_{2000}$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
1.	Luksemburg	Szwecja	Dania, Finlandia	Dania
2.	Irlandia	Belgia	Dania, Finlandia	Austria
3.	Dania	Holandia	Belgia, Austria	Szwecja
4.	Belgia	Finlandia	Belgia, Austria	Finlandia
5.	Austria	Dania	Szwecja	Luksemburg
6.	Holandia	Francja, Wielka Brytania	Holandia	Holandia
7.	Niemcy	Francja, Wielka Brytania	Niemcy, Luksemburg	Irlandia
8.	Finlandia	Austria	Niemcy, Luksemburg	Malta
9.	Szwecja	Luksemburg, Irlandia, Niemcy	Irlandia	Belgia
10.	Francja	Luksemburg, Irlandia, Niemcy	Francja	Niemcy
11.	Włochy	Luksemburg, Irlandia, Niemcy	Włochy	Wielka Brytania
12.	Wielka Brytania	Włochy, Hiszpania	Wielka Brytania, Hiszpania	Włochy
13.	Cypr	Włochy, Hiszpania	Wielka Brytania, Hiszpania	Cypr
14.	Hiszpania	Cypr	Portugalia	Hiszpania
15.	Słowenia	Grecja	Słowenia	Francja
16.	Portugalia	Portugalia	Grecja, Malta, Czechy	Słowenia
17.	Malta	Słowenia	Grecja, Malta, Czechy	Grecja
18.	Grecja	Malta	Grecja, Malta, Czechy	Czechy
19.	Czechy	Czechy	Cypr	Portugalia
20.	Węgry	Węgry	Węgry, Polska	Polska
21.	Słowacja	Słowacja	Węgry, Polska	Węgry
22.	Estonia	Polska	Estonia, Łotwa	Słowacja
23.	Polska	Estonia	Estonia, Łotwa	Estonia
24.	Litwa	Litwa	Litwa, Słowacja	Litwa
25.	Łotwa	Łotwa	Litwa, Słowacja	Łotwa
26.	Rumunia	Bułgaria	Bułgaria	Bułgaria
27.	Bułgaria	Rumunia	Rumunia	Rumunia

Źródło: opracowanie własne [5, 8, 9, 10]

W tabeli 1 przedstawiono ranking państw Unii Europejskiej w 2000 r. według badanych zmiennych. Widzimy, że w 2000 roku zgodność miejsc w ran-



kingu pomiędzy  $Y$  i  $X_1$  występuje w 6 państwach Unii, pomiędzy  $Y$  i  $X_2$  – w jedenastu, a pomiędzy  $Y$  i  $X_3$  – w czterech. Wskaźniki korelacji, liczone współczynnikiem korelacji rang Spearmana, między tymi trzema parami zmiennych są następujące: 0,9; 0,89; 0,88. Oznacza to, że o sile związku nie decyduje jednak zgodność miejsc w rankingu, bo najmocniej z  $Y_{2000}$  jest skorelowana zmienna  $X_1$ , a nie  $X_2$ , jak można było się tego spodziewać.

Zwraca uwagę fakt, że miejsca w rankingu od 13 do 27 zajmują (co prawda na różnych pozycjach, ale wyżej tylko Malta według badanych zmiennych  $X_3$ ) nowo przyjęte kraje Unii Europejskiej.

Polska, według wartości wskaźnika PKB *per capita*, znajdowała się w 2000 roku na 23 pozycji w rankingu 27 krajów Unii Europejskiej. W ocenie jakości życia wskaźnikiem Human Development Index Polska miała w 2000 roku 22 pozycję za Czechami, Węgrami, Słowacją lecz przed Estonią, Litwą, Łotwą, Bułgarią i Rumunią.

Natomiast Polska znalazła się na pozycji 20, w ocenie jakości życia wskaźnikiem Human Wellbeing Index.

Ocena jakości życia wskaźnikiem Happy Life Years uplasowała Polskę na 20 pozycji (w rankingu 27 krajów Unii).

Przeprowadzony oddzielny ranking według zmiennych  $Y$  i  $X$  12 nowych państw Unii Europejskiej, czyli państw, które wstąpiły do Unii w 2004 roku i później, umożliwił określenie korelacji rang Spearmana między trzema parami zmiennych (dla 12 państw): 0,99; 0,88; 0,85. Interesująca wydaje się więc korelacja pomiędzy  $Y_{2000}$  i  $X_3$  (dla 12 państw), która jest niższa od korelacji pomiędzy  $Y_{2000}$  i  $X_3$  (dla 27 państw).

Poniżej zapisano dostępne wskaźniki służące do oceny jakości życia w 2005 roku w krajach Unii Europejskiej:

$Y_{2005}$  – Produkt krajowy brutto *per capita*,

$X_4$  – Human Development Index,

$X_5$  – Worldwide Quality of life index,

$X_6$  – Life Satisfaction.

**Tabela 2.** Ranking państw Unii Europejskiej w 2005 roku według badanych zmiennych

Lp.	$Y_{2005}$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
1.	Luksemburg	Irlandia	Irlandia	Dania
2.	Irlandia	Szwecja	Luksemburg	Finlandia
3.	Dania	Holandia	Szwecja	Austria
4.	Austria	Francja, Finlandia	Włochy	Szwecja

Tabela 2. Ranking państw... (cd.)

Lp.	$Y_{2005}$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
5.	Wielka Brytania	Francja, Finlandia	Dania	Irlandia, Luksemburg
6.	Holandia	Hiszpania, Dania	Hiszpania	Irlandia, Luksemburg
7.	Belgia	Hiszpania, Dania	Finlandia	Belgia, Holandia, Hiszpania
8.	Francja	Austria	Holandia	Belgia, Holandia, Hiszpania
9.	Szwecja	Wielka Brytania, Belgia	Portugalia	Belgia, Holandia, Hiszpania
10.	Finlandia	Wielka Brytania, Belgia	Austria	Wielka Brytania, Malta
11.	Niemcy	Luksemburg	Grecja	Wielka Brytania, Malta
12.	Włochy	Włochy	Cypr	Niemcy, Włochy, Cypr
13.	Hiszpania	Niemcy	Belgia	Niemcy, Włochy, Cypr
14.	Grecja	Grecja	Francja	Niemcy, Włochy, Cypr
15.	Słowenia	Słowenia	Niemcy	Słowenia
16.	Cypr	Cypr	Słowenia	Francja
17.	Portugalia	Portugalia	Malta	Grecja
18.	Malta	Czechy	Wielka Brytania	Czechy
19.	Czechy	Malta	Czechy	Polska, Rumunia
20.	Węgry	Węgry	Węgry	Polska, Rumunia
21.	Słowacja	Polska	Słowacja	Portugalia
22.	Estonia	Słowacja	Polska	Estonia, Węgry
23.	Litwa	Litwa	Bułgaria	Estonia, Węgry
24.	Polska	Estonia	Rumunia	Słowacja
25.	Łotwa	Łotwa	Litwa	Łotwa
26.	Bułgaria	Bułgaria	Łotwa	Litwa
27.	Rumunia	Rumunia	Estonia	Bułgaria

Źródło: opracowanie własne [2, 8, 11]

W tabeli 2 przedstawiono ranking państw Unii Europejskiej w 2005 roku według badanych zmiennych. Widzimy, że w 2005 roku zgodność miejsc w rankingu pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_4$  występuje w 10 państwach Unii, pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_5$  – w trzech, a pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_6$  – w pięciu. Wskaźniki korelacji, liczone

współczynnikiem korelacji rang Spearmana, między tymi trzema parami zmiennych są następujące: 0,9; 0,82; 0,87.

Zwraca uwagę fakt, że ostatnie miejsca w rankingu od 15 do 27 zajmują pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_4$  i pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_5$  (co prawda na różnych pozycjach, ale nigdy wyżej) nowo przyjęte kraje Unii Europejskiej. Natomiast w rankingu pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_6$  np. Malta znajduje się na 10 miejscu, a Portugalia na 21 miejscu.

Polska według wartości wskaźnika PKB *per capita* znajdowała się w 2005 roku na 24 pozycji w rankingu 27 krajów Unii Europejskiej. Wszystkie kraje (porównując z Polską), które wstąpiły do Unii Europejskiej w 2004 roku, mają wyższą pozycję w rankingu ustalonym według wartości PKB *per capita*.

Natomiast Polska znalazła się na 19 pozycji, w rankingu 27 krajów Unii Europejskiej, w ocenie jakości życia wskaźnikiem Life satisfaction. W ocenie jakości życia wskaźnikiem Human Development Index Polska miała w 2005 roku 21 pozycję za Czechami, Maltą i Węgrami, lecz przed Słowacją, Litwą, Estonią, Łotwą, Bułgarią i Rumunią.

Ocena jakości życia wskaźnikiem Worldwide Quality of Life Index uplasowała Polskę na 22 pozycji (w rankingu 27 krajów Unii), niestety tylko przed Bułgarią, Rumunią, Litwą, Łotwą i Estonią. Przeprowadzony oddzielny ranking według zmiennych Y i X 12 nowych państw Unii Europejskiej, czyli państw, które wstąpiły do Unii w 2004 roku i później, umożliwił określenie korelacji rang Spearmana między trzema parami zmiennych (12 państw): 0,94; 0,81; 0,69. Należy zauważyć, że pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_6$  (dla 12 państw), korelacja jest niższa od korelacji pomiędzy  $Y_{2005}$  i  $X_6$  (dla 27 państw).

## 9. Podsumowanie

W artykule omówiono dostępne wskaźniki jakości życia. Wyodrębniono również w tych wskaźnikach badane aspekty jakości życia. Przedstawiono ranking państw Unii Europejskiej w 2000 roku i 2005 roku według badanych wskaźników. Obserwując zmiany w rankingach z perspektywy czasu, można zauważyć jedynie nieznaczne zmiany pozycji, tylko między sąsiadującymi w zestawieniu państwami. Poza tym nie widać żadnych charakterystycznych zmian w kształtowaniu się miejsc w rankingu, w szczególności – w grupie nowych państw Unii.

## Literatura

- [1] Boarini R., Johansson A., Mira M., Alternative measures of well-being. OECD Social, employment and migration working papers No. 33, 2006.
- [2] European Foundation for the Improvement of Living and Working Condition, Quality of life in Europe, Dublin, 2004.
- [3] Grasso M., Canova L., [in:] *Social Indicators Research*, 2008, 87:1–25.
- [4] Land K., 1999. *Social Indicators* [in:] Edgar and Rhonda Montgomery (eds.) Encyclopedia of Sociology, New York: Macmillan, pp 1844–1850.
- [5] Prescott-Allen R., The Wellbeing of Nations – A Country-by-Country Index of Quality of Life and the Environment, Island Press, Washington, Covelo, London 2001.
- [6] Rapley M., Quality of Life Research, SAGE Publications, London, Thousand Oaks, New Delhi, 2003.
- [7] Sirgy M.J., Michalos A.C., Ferriss A.L., Easterlin R.A., Patrick D., Pavot W., [in:] *Social Indicators Research* 2006, 76: 343–466.
- [8] United Nations Development Programme, Human Development Report 2006. Oxford University Press, New York, Oxford 2006.
- [9] Veenhoven R. *Social Indicators Research*, 2005, 71, pp. 61–86.
- [10] <http://www.worlddatabaseofhappiness.eur.nl>
- [11] [http://www.economist.com/media/pdf/QUALITY\\_OF\\_LIFE.PDF](http://www.economist.com/media/pdf/QUALITY_OF_LIFE.PDF)

## Summary

### **Quality of Life in European Union in the Light of Social and Economic Data**

The available indexes of the quality of life are discussed in the article. The researched aspects of the quality of life have been distinguished and stressed within the applied indexes. The 2000 and 2005 EU country members rankings according to the indexes in question have been shown. Due to the lack of data, other indexes have been applied in the ranking for the years in question. However, following the changes in the ranking, one may observe regularities concerning changes of ranking positions only for pairs of countries. Apart from that, no distinctive changes in the development of the ranking positions of the individual new EU country members can be observed.

Stanisława Ostasiewicz

## Ocena prawdopodobieństwa przeżycia dla danych niepełnych

### 1. Wprowadzenie

W przypadku szacowania parametrów Tablic Trwania Życia (TTŻ) próba losowa ustalana jest i pobierana w tym samym momencie czasu (por. [3]). Próbę stanowi grupa noworodków (generacja), która obserwowana jest od momentu urodzenia aż do momentu zgonu ostatniej jednostki populacji, czyli około 100 lat. Liczebność populacji sukcesywnie zmniejsza się, co jest powodowane wymieraniem populacji. W tym badaniu śmierć jest jedynym powodem ubytku jednostki z populacji. Parametry tablic obliczane są na podstawie liczby zgonów i liczby dożywających określonego wieku.

W pracy niniejszej rozpatrywane jest badanie (por. [2, 5]), w którym ustalony jest okres jego trwania, natomiast badane jednostki mogą się zgłaszać na badanie w dowolnym momencie jego trwania i obserwowane są do czasu śmierci lub zakończenia badania, w zależności – co zdarzy się wcześniej. Zdarzeniem obserwowanym jest czas przeżycia. Powodem zmniejszania się populacji w tym przypadku jest śmierć, ale również może to być wycofanie się jednostki z badania z innych niż śmierć powodów. Taką jednostkę tracimy z pola widzenia, a informację o jej przeżyciu nazywa się informacją utraconą lub cenzurowaną. Można by oczywiście z takich obserwacji zrezygnować, ale byłaby to strata. Traktuje się je więc jako niepełne i wykorzystuje, ponieważ niosą z sobą pewne informacje. W badaniach medycznych taka sytuacja zdarza się bardzo często, na przykład jeśli badany jest czas przeżycia populacji, która poddana była skomplikowanej operacji.

W tego rodzaju badaniach oceniane jest prawdopodobieństwo przeżycia rocznych przedziałów lub funkcja przeżycia.

Niech  $N_x$  oznacza liczbę jednostek, które dożyły do  $x$  rocznicy udziału w badaniu, czyli do początku przedziału  $(x, x + 1)$ , i niech  $p_x$  oznacza prawdo-

podobieństwo, że jednostka, która dożyła do momentu  $x$ , przeżyje 1 rok, to znaczy do końca przedziału  $(x, x+1)$ . Grupę osób dożywających momentu  $x$  można podzielić na dwie rozłączne podgrupy o liczebnościach odpowiednio równych  $m_x$  i  $n_x$ . Pierwszą grupę tworzą osoby, które przystąpiły do badania wcześniej niż  $x+1$  lat przed jego zakończeniem, czyli są obserwowane przez cały okres czasu  $(x, x+1)$ . Do drugiej grupy należą badani, którzy przystąpili do badania mniej niż  $x+1$  lat przed zakończeniem badania, ale dłużej niż  $x$  lat. Dla tych osób data zakończenia obserwacji poprzedza ich  $x+1$  rocznicę przystąpienia do badania. Spośród  $m_x$  osób grupy pierwszej,  $s_x$  przeżyje do końca przedziału i  $d_x$  umrze, nie dożywając  $x+1$  rocznicy. W grupie drugiej początkowa liczba badanych wynosiła  $n_x$ . Spośród tych badanych,  $d'_x$  umrze przed końcem przedziału i  $w_x$  przeżyje do końca przedziału. Ogólna liczba zgonów  $D_x$  w przedziale  $(x, x+1)$  jest równa  $d'_x + d_x$ . W grupie, która obserwowana jest przez cały przedział, liczba zgonów wynosi  $d_x$  i w grupie, która wcześniej zrezygnowała z badania, wynosi  $d'_x$ . Zarówno liczba zgonów, jak i liczba dożywających są to zmienne losowe, które będą wykorzystane do estymacji prawdopodobieństwa przeżycia  $p_x$  i prawdopodobieństwa zgonu  $q_x$ .

Liczba osób dożywających do końca przedziału, spośród osób obserwowanych przez cały okres  $(x, x+1)$ , oznaczona jest jako zmienna losowa  $S_x$ . Zmienna ta ma rozkład dwumianowy  $B(m_x, p_x)$ . Prawdopodobieństwo, że  $s_x$  osób z tej grupy dożyje do końca przedziału, jest równe:

$$P(S_x = s_x) = \binom{m_x}{s_x} p_x^{s_x} (1 - p_x)^{m_x - s_x} = \binom{m_x}{s_x} p_x^{s_x} (1 - p_x)^{d_x}.$$

Oznaczmy przez  $p_x(\frac{1}{2})$  prawdopodobieństwo dożycia do momentu wycofania się osoby z badania, który jest momentem losowym należącym do przedziału  $(x, x+1)$ . Grupa osób, które zrezygnowały z badania, liczy  $n_x$  osób. Zmienną losową, oznaczającą liczbę osób dożywających do momentu wycofania się z badania, oznaczmy  $W_x$ . Zmienna ta ma rozkład  $B(n_x, p_x(\frac{1}{2}))$ . Prawdopodobieństwo, że  $w_x$  osób z tej grupy dożyje do momentu wycofania się z badania, jest równe:

$$P(W_x = w_x) = \binom{n_x}{w_x} p_x(\frac{1}{2})^{w_x} (1 - p_x(\frac{1}{2}))^{d'_x};$$

gdzie  $d'_x = n_x - w_x$ .

Grupy jednostek wycofujących się z badania i pozostających pod obserwacją przez cały okres badania są niezależne, tak więc rozkład prawdopodobieństwa

liczby dożywających jest dwuwymiarowym rozkładem dwumianowym o niezależnych składowych. Funkcja wiarygodności dla estymacji parametru  $p_x$  ma postać:

$$L(x, p_x) = \binom{m_x}{s_x} p_x^{s_x} (1 - p_x)^{d_x} \binom{n_x}{w_x} p_x \left(\frac{1}{2}\right)^{w_x} (1 - p_x \left(\frac{1}{2}\right))^{d_x} \quad (1)$$

Jeżeli do obliczenia  $p_x \left(\frac{1}{2}\right)$  przyjmiemy konkretną procedurę obliczeniową, to otrzymamy funkcję wiarygodności dla estymacji parametru  $p_x$ .

Głównym problemem jest wyrażenie prawdopodobieństwa dożycia do momentu wycofania się z badania  $p_x \left(\frac{1}{2}\right)$  przez prawdopodobieństwo  $p_x$  przeżycia roku.

## 2. Metoda aktuarialna

W metodzie tej (por. [1, 2, 5]) nie wyróżnia się dwóch grup badanych: tych obserwowanych przez cały okres badania i tych którzy są obserwowani przez część okresu. Estymator prawdopodobieństwa przeżycia okresu  $(x, x+1)$  ma następującą postać:

$$\hat{p}_x = 1 - \frac{D_x}{N_x - \frac{1}{2}W_x}$$

gdzie  $D_x$  oznacza ogólną liczbę zgonów w przedziale  $(x, x+1)$ ,  $N_x$  liczbę dożywających początku przedziału i  $W_x$  liczbę dożywających do końca przedziału jednostek, które wycofały się z badania.

Z postaci estymatora wynika, że jednostki, które wycofują się z badania, obserwuje się tylko przez połowę okresu. Jeżeli  $\hat{p}_x$  potraktujemy jako prawdopodobieństwo sukcesu w  $N_x - \frac{1}{2}W_x$  próbach, to wariancja estymatora  $\hat{p}_x$  określona jest wzorem:

$$V(\hat{p}_x) = \frac{1}{N_x - \frac{1}{2}W_x} \hat{p}_x \cdot \hat{q}_x$$

## 3. Estymator A

Przyjmuje się założenie (por. [1, 2]), że moment śmierci jednostek biorących udział w badaniu jest losowy i ponadto moment wycofania się z badania też jest losowy z przedziału  $(x, x+1)$ .

Jeżeli przyjmiemy, że intensywność zgonów wśród osób wycofujących się z badania jest taka sama jak osób biorących udział w badaniu cały czas i ponadto, jest ona stała w całym przedziale, to prawdopodobieństwo  $p_x(\frac{1}{2})$  można wyrazić następująco:

$$p_x(\frac{1}{2}) = \int_x^{x+1} \exp(-\int_x^t \mu(\tau) d\tau) dt$$

gdzie  $\mu(\tau)$  jest to intensywność zgonów osób wycofujących się z badania. Jeżeli

$$\mu(\tau) = \mu_x$$

gdzie  $\mu_x$  jest intensywnością zgonów osób biorących udział w badaniu cały czas i ponadto intensywność zgonów jest stała w całym przedziale, to

$$\int_x^t \mu(\tau) d\tau = \int_x^t \mu_x d\tau = -\mu_x(t-x)$$

stąd

$$p_x(\frac{1}{2}) = \int_x^{x+1} \exp(-(t-x)\mu_x) dt = \frac{1}{\mu_x} (1 - e^{-\mu_x}) = -\frac{1}{\log p_x} (1 - p_x)$$

Korzystając z powyższej zależności między  $p_x(\frac{1}{2})$  i  $p_x$  oraz z postaci funkcji wiarygodności (por. wzór 1), otrzymujemy:

$$L_A(x, p_x) = p_x^{s_x} (1 - p_x)^{d_x + w_x} (\log p_x^{-n_x} [(1 - p_x) + \log p_x]^{d_x})$$

Logarytmując powyższą funkcję, a następnie różniczkując ją względem  $p_x$  i przyrównując pochodną do zera, otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{s_x}{p_x} - \frac{d_x + w_x}{1 - p_x} - \frac{n_x}{p_x \log p_x} + \frac{d'_x (1 - p_x)}{[(1 - p_x) + \log p_x] p_x} = 0$$

Rozwiązanie tego równania jest estymatorem największej wiarygodności parametru  $p_x$ .

Analityczne rozwiązanie tego równania jest bardzo trudne, ale można w sposób prosty znaleźć rozwiązanie numeryczne.



#### 4. Estymator B

Kiedy osoba wycofuje się z badania w sposób losowy, wówczas średni czas jej przebywania w przedziale  $(x, x+1)$  wynosi połowę długości tego przedziału (por. [2]), czyli przedział  $(x, x + \frac{1}{2})$ . Prawdopodobieństwo dożycia do momentu wycofania, które oznacza się  $p_x(\frac{1}{2})$ , jest następujące:

$$p_x(\frac{1}{2}) = \exp(-\frac{1}{2}\mu_x) = \exp(-\mu_x)^{\frac{1}{2}} = p_x^{\frac{1}{2}}$$

Przyjmując  $p_x^{\frac{1}{2}}$  jako prawdopodobieństwo dożycia do wycofania się z badania i  $1 - p_x^{\frac{1}{2}}$  jako prawdopodobieństwo zgonu przed wycofaniem się z badania, rozkład zmiennej losowej  $W_x$  jest następujący:

$$P(W_x = w_x) = \binom{n_x}{w_x} p_x^{\frac{w_x}{2}} (1 - p_x^{\frac{1}{2}})^{d'_x}.$$

Jak widać, liczba dożywających do połowy przedziału ma rozkład dwumianowy  $B(p_x^{\frac{1}{2}}, n_x)$ .

Oczekiwana liczba dożywających i oczekiwana liczba zgonów są odpowiednio równe:

$$E(W_x) = n_x p_x^{1/2} \text{ i } E(D'_x) = n_x (1 - p_x^{1/2})$$

Funkcja wiarygodności ma postać:

$$L_B(x, p_x) = p_x^{s_x + (1/2)w_x} (1 - p_x)^{d'_x} (1 - p_x^{1/2})^{d'_x}$$

Estymatorem  $\hat{p}_x$  prawdopodobieństwa przeżycia przedziału  $(x, x+1)$  jest rozwiązanie następującego równania kwadratowego:

$$((N_x - \frac{1}{2}n_x)\hat{p}_x + \frac{1}{2}d'_x\hat{p}_x^{1/2} - (s_x + \frac{1}{2}w_x)) = 0$$

Rozwiązanie to jest następujące (por. [2]):

$$\hat{p}_x = \left[ \frac{-\frac{1}{2}d'_x + \sqrt{\frac{1}{4}d_x'^2 + 4(N_x - \frac{1}{2}n_x)(s_x + \frac{1}{2}w_x)}}{2(N_x - \frac{1}{2}n_x)} \right]^2.$$

Jest to ocena prawdopodobieństwa zgonu w przedziale  $(x, x+1)$ .

Asymptotyczna wariancja estymatora  $\hat{p}_x$  dana jest w postaci wzoru:

$$V(\hat{p}_x) = \frac{p_x q_x}{M_x} \quad \text{gdzie} \quad M_x = m_x + n_x (1 + \hat{p}_x^{1/2})^{-1}$$

## 5. Estymator Elvebecka

Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa zgonów jest jednostajny w rozpatrywanym przedziale, oznacza to, że liczba dożywających w każdym punkcie przedziału jest funkcją liniową pomiędzy punktami  $x$  i  $x+1$ . W przypadku krótkich przedziałów interpolacja liniowa jest dość dokładna (por. [5, s. 97]).

Prawdopodobieństwo przeżycia do środka przedziału jest następujące:

$$p_x(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2}q_x = \frac{1}{2}(1 + p_x)$$

Podstawiając do funkcji wiarygodności określonej wzorem (1) powyższe wyrażenie, otrzymuje się funkcję wiarygodności:

$$L_E(x, p_x) = p_x^{s_x} (1 - p_x)^{D_x} (1 + p_x)^{w_x}.$$

Na podstawie funkcji tej wyznaczany jest estymator  $\hat{p}_x^E$  prawdopodobieństwa przeżycia w przedziale  $(x, x+1)$ :

$$\hat{p}_x^E = \frac{w_x - D_x + \sqrt{(w_x - D_x)^2 + 4N_x s_x}}{2N_x}.$$

Asymptotyczna wariancja tego estymatora jest równa:

$$V(\hat{p}_x^E) = \frac{\hat{p}_x^E (1 - (\hat{p}_x^E)^2)}{(N_x + n_x) [1 + \hat{p}_x^E - n_x / (N_x + n_x)]}.$$

## 6. Estymator Droletta

W metodzie tej (por. [1]) nie rozpatruje się obserwacji cenzurowanych. Obserwacje dotyczące przeżycia i śmierci rozpatruje się w momencie końcowym przedziału  $(x, x+1)$ . Stąd też  $n_x = 0$  i  $m_x = N_x$ . Funkcja wiarygodności w tym przypadku ma postać:

$$L_D(x, p_x) = p_x^{s_x} (1 - p_x)^{d_x}$$

Estymator prawdopodobieństwa przeżycia  $\hat{p}_x^D$  i jego wariancja wyrażają się następująco:

$$\hat{p}_x^D = \frac{S_x}{m_x},$$

$$V(\hat{p}_x^D) = \frac{\hat{p}_x^D \hat{q}_x^D}{m_x}.$$

## 7. Estymator Kaplana–Meiera

Estymator ten (por. [1, 4, 5]) umożliwia dokładniejsze oszacowanie funkcji przeżycia niż estymatory poprzednio omówione. Przy jego konstrukcji wykorzystuje się uporządkowane czasy trwania poszczególnych jednostek biorących udział w badaniu. Przez czas trwania jednostki rozumie się długość okresu, który minął od momentu przystąpienia do badania do momentu śmierci lub do momentu wycofania się z badania. W tym drugim przypadku czas przeżycia nazywa się czasem cenzurowanym. Załóżmy, że w badaniu wzięło udział  $l_0$  osób i że ich obserwowane czasy trwania równe są  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{l_0}$  (niektóre z tych czasów są cenzurowane). Czasy trwania mogą się powtarzać, wówczas uporządkowany ciąg czasów przeżycia jest krótszy i przyjmijmy, że liczy on  $w$  elementów. Uporządkowany ciąg czasów przeżycia jest wówczas następujący:

$t_0 < t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(w)}$  gdzie  $t_{(k)}$  oznacza  $k$ -ty co do wielkości ukończony czas przeżycia. Uporządkowane czasy przeżycia wyznaczają granice przedziałów, przy czym zakłada się, że zgon następuje na początku przedziału czasu trwania (oznacza to przedziały są lewostronnie otwarte). Oznacza to, że w pierwszym przedziale  $< t_0, t_{(1)}$  nie ma zgonów. Pierwszy zgon ma miejsce w momencie  $t_{(1)}$ .

Niech  $l_i$  oznacza liczbę jednostek, dla których czas przeżycia jest większy niż  $t_{(i)}$  lub równy  $t_{(i)}$ . Liczbę tych jednostek, dla których zgon nastąpił w momencie  $t_{(i)}$  oznacza się  $d_{(i)}$ . Tak więc estymatorem zgonu w przedziale czasu  $(t_i - \varepsilon, t_i)$

może być statystyka  $\frac{d_i}{l_i}$ , a estymatorem, że osoba nie umrze w tym przedziale,

statystyka  $\frac{l_i - d_i}{l_i}$ . W przedziale  $(t_i, t_{i+1} - \varepsilon)$  nie ma zgonów, a więc prawdopodobieństwo przeżycia jest równe 1.

Prawdopodobieństwo przeżycia obu przedziałów łącznie, czyli  $(t_{(i)} - \varepsilon, t_{(i)} + \varepsilon)$ , jest to iloczyn prawdopodobieństw przeżycia przedziałów  $(t_i - \varepsilon, t_i > i (t_i, t_{i+1} - \varepsilon)$ , czyli wynosi  $\left(\frac{l_i - d_i}{l_i}\right)$ .

Jeśli  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to

$$\left(\frac{l_i - d_i}{l_i}\right)$$

jest estymatorem prawdopodobieństwa przeżycia w przedziale  $(t_{(i)}, t_{(i+1)}) >$ .

Estymatorem funkcji przeżycia w całym badanym okresie jest iloczynem wartości funkcji przeżycia w poszczególnych przedziałach  $(t_{(i)}, t_{(i+1)}) >$  i określony jest następująco:

$$\hat{S}_i^{KM} = \prod_{k=1}^i \left(\frac{l_k - d_k}{l_k}\right).$$

Gdzie  $l_k$  oznacza łączną liczbę osób dla których czas przeżycia przekracza  $t_{(k)}$  lub jest równy  $t_{(k)}$ , i  $d_k$  jest liczbą zmarłych w momencie  $t_{(k)}$ . Wariancja estymatora Kaplana–Meiera określona jest wzorem:

$$V(\hat{S}_i^{KM}) = (\hat{S}_i^{KM})^2 \left\{ \sum_{k=1}^i \frac{d_k}{l_k(l_k - d_k)} \right\}$$

Sposób konstrukcji estymatora Kaplana–Meiera przedstawiony zostanie na przykładzie czasów zaniku choroby (wyrażonych w tygodniach) u 18 jednostek chorych na chorobę nowotworową (por. [1]). Uporządkowane czasy trwania są następujące:

10, 13\*, 18\*, 19, 23\*, 30, 36, 38\*, 54\*, 56\*, 59, 75, 93, 97, 104\*, 107, 107\*, 107\*.

Liczby z gwiazdkami oznaczają obserwacje cenzurowane.

Zaobserwowane czasy trwania podzielimy na przedziały tak, że zaobserwowane wartości ukończonego czasu trwania wyznaczają granice tych przedziałów i zgony występują na początku przedziału. Przedziały te są następujące:

$< 0, 10), < 10, 19), < 19, 30), < 30, 36), < 36, 59), < 59, 75), < 75, 93), < 93, 97), < 97, 107).$

Wartość estymatora funkcji przeżycia w pierwszym przedziale  $< t_0, t_{(1)} )$  jest następująca:

$$\hat{S}_1^{KM} = \frac{l_1 - d_1}{l_1} = \frac{18 - 0}{18} = 1.$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo przeżycia w tym przedziale jest równe 1. Wariancja estymatora jest natomiast równa:

$$V(\hat{S}_1^{KM}) = 1 \cdot \frac{d_1}{l_1(l_1 - d_1)} = 1 \cdot \frac{0}{18(18 - 0)} = 0$$

Prawdopodobieństwo przeżycia przedziału  $< 10, 19 )$  oblicza się podobnie. Jest to liczba obliczona następująco:

$$\frac{l_2 - d_2}{l_2} = \frac{18 - 1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Prawdopodobieństwo przeżycia obu przedziałów (jeżeli jednostki przeżywają poszczególne przedziały niezależnie), czyli wartość funkcji przeżycia poza moment czasu 10, jest iloczynem prawdopodobieństw przeżycia obu tych przedziałów. Czyli:

$$\hat{S}_2^{KM} = \frac{l_1 - d_1}{l_1} \cdot \frac{l_2 - d_2}{l_2} = 1 \cdot \frac{18 - 1}{18} = \frac{17}{18}$$

Wariancja estymatora  $\hat{S}_2^{KM}$  jest następująca:

$$V(\hat{S}_2^{KM}) = \left(\frac{17}{18}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{d_1}{l_1(l_1 - d_1)} + \frac{d_2}{l_2(l_2 - d_2)} \right\} = \left(\frac{17}{18}\right)^2 \left(0 + \frac{1}{18(18 - 1)}\right) = 0,892 \cdot 0,00327 = 0,00291$$

Funkcja przeżycia jest funkcją schodkową przyjmującą takie same wartości w całym przedziale. Wartość ta jest równa wartości funkcji w momencie w którym nastąpił zgon.

Obecnie policzone zostaną wartości estymatorów w punktach 19, 30, 36, 59, 75, 93, 97 i 107. Wartości estymatorów oznaczone będą  $\hat{S}_3, \hat{S}_4, \hat{S}_5, \hat{S}_6, \hat{S}_7, \hat{S}_8$

$$\hat{S}_3 = \frac{l_1 - d_1}{l_1} \cdot \frac{l_2 - d_2}{l_2} \cdot \frac{l_3 - d_3}{l_3} = 1 \cdot \frac{18 - 1}{18} \cdot \frac{15 - 1}{15} = 1 \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{14}{15} = 0,8815$$

$$\hat{S}_4 = \frac{l_1 - d_1}{l_1} \cdot \frac{l_2 - d_2}{l_2} \cdot \frac{l_3 - d_3}{l_3} \cdot \frac{l_4 - d_4}{l_4} = 1 \cdot \frac{18 - 1}{18} \cdot \frac{15 - 1}{15} \cdot \frac{13 - 1}{13} = 1 \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{12}{13} = 0,8137$$

$$\hat{S}_6 = \frac{l_1 - d_1}{l_1} \cdot \frac{l_2 - d_2}{l_2} \cdot \frac{l_3 - d_3}{l_3} \cdot \frac{l_4 - d_4}{l_4} \cdot \frac{l_5 - d_5}{l_5} \cdot \frac{l_6 - d_6}{l_6} = \hat{S}_5 \cdot \frac{8-1}{8} = 0,6525$$

$$\hat{S}_7 = \hat{S}_6 \cdot \frac{7-1}{7} = 0,5594$$

$$\hat{S}_8 = \hat{S}_7 \cdot \frac{6-1}{6} = 0,4662$$

$$\hat{S}_9 = \hat{S}_8 \cdot \frac{5-1}{5} = 0,3729$$

$$\hat{S}_{10} = \hat{S}_9 \cdot \frac{3-1}{3} = 0,2486$$

Teraz policzone zostaną wariancje estymatorów  $\hat{S}_3$  i  $\hat{S}_4$ .

$$\begin{aligned} V(\hat{S}_3) &= 0,8815^2 \left\{ \frac{d_1}{l_1(l_1 - d_1)} + \frac{d_2}{l_2(l_2 - d_2)} + \frac{d_3}{l_3(l_3 - d_3)} \right\} = \\ &= 0,8815^2 \left( 0 + \frac{1}{18(18-1)} + \frac{1}{15(15-1)} \right) = 0,00624 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\hat{S}_4) &= 0,8137^2 \left\{ \frac{d_1}{l_1(l_1 - d_1)} + \frac{d_2}{l_2(l_2 - d_2)} + \frac{d_3}{l_3(l_3 - d_3)} + \frac{d_4}{l_4(l_4 - d_4)} \right\} = \\ &= 0,8137^2 \left( 0 + \frac{1}{18(18-1)} + \frac{1}{15(15-1)} + \frac{1}{13(13-1)} \right) = 0,0000901 \end{aligned}$$

Wariancje pozostałych estymatorów podane zostaną bez obliczeń.

$$V(\hat{S}_5) = 0,012$$

$$V(\hat{S}_6) = 0,017$$

$$V(\hat{S}_7) = 0,0199$$

$$V(\hat{S}_8) = 0,02108$$

$$V(\hat{S}_9) = 0,0205$$

$$V(\hat{S}_{10}) = 0,01943$$

## 8. Estymator C

Niech  $t_j$  oznacza moment zgonu (por. [2]) w przedziale  $(x, x+1)$   $j$ -tej osoby  $j = 1, 2, 3, \dots, D_x$ . Ponieważ zgon może mieć miejsce w dowolnym punkcie przedziału, moment zgonu jest zmienną losową ciągłą o funkcji gęstości określonej wzorem:

$$f(t_j, x) = e^{-t_j \mu_x} \cdot \mu_x = e^{-\mu_x t_j} \cdot \mu_x = -p_x^{t_j} \cdot \ln p_x$$

gdź

$$e^{-\mu_x} = -p_x \text{ i } \mu_x = \ln p_x, \quad 0 \leq t_j \leq 1.$$

Moment wycofania się z badania z przedziału  $(x, x+1)$   $i$ -tej jednostki (który oznaczamy  $\tau_i$ ) spośród  $w_x$  jednostek jest również zmienną losową ciągłą przyjmującą wartości z przedziału między zero i jeden. Funkcja gęstości tej zmiennej losowej jest następująca:

$$g(\tau_i, x) = e^{-\tau_i \mu_x} = e^{-\mu_x \tau_i} = p_x^{\tau_i} \quad 0 \leq \tau_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, w_x$$

Zakłada się, że intensywność zgonów jest taka sama jak intensywność wycofania się z badania obserwowanych jednostek. Prawdopodobieństwo tego, że każda jednostka z grupy  $s_x$  przeżyje przedział  $(x, x+1)$ , jest równe  $p_x$ . Funkcja wiarygodności dla wejściowej grupy  $N_x$  jednostek jest następująca:

$$L_C(x, p_x) = p_x^{s_x} \left( \prod_{i=1}^{w_x} p_x^{\tau_i} \right) \prod_{j=1}^{D_x} (p_x^{t_j} \log p_x) = p_x^{T_x} (\log p_x)^{D_x}$$

gdzie

$$T_x = s_x + \sum_{i=1}^{w_x} \tau_i + \sum_{j=1}^{D_x} t_j.$$

Estymator prawdopodobieństwa przeżycia  $p_x$  otrzymany na podstawie powyższej funkcji wiarygodności jest następujący:

$$\hat{p}_x = e^{\frac{D_x}{T_x}} = e^{-\hat{\mu}_x}$$

gdzie

$$\hat{\mu}_x = -\frac{D_x}{T_x}.$$

$\hat{\mu}_x$  jest to estymator intensywności zgonów.

Wariancja estymatora prawdopodobieństwa przeżycia w przedziale  $(x, x + 1)$  jest równa:

$$\text{Var}(\hat{p}_x) = \hat{p}_x^2 \left( \frac{D_x}{T_x^2} \right).$$

Inne własności podane są w publikacji [2].

## Literatura

- [1] Balicki A., *Analiza przeżycia i tablice wymieralności*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2006.
- [2] Chiang C.L., *The life table and its applications*, Robert E. Krieger Publishing Company Malabar, Florida 1984.
- [3] Holzer J., *Demografia*, PWE, Warszawa 1999.
- [4] Kleinbaum D.G., *Survival analysis*, Springer-Verlag, New York 1996.
- [5] *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych*, red. S. Ostasiewicz, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.

## Summary

### Estimation of the Probability of Survival for Incomplete Data

The aim of this paper is to analyse the basic methods of estimation of probability of survival in the case of follow-up study, when some individuals left the cohort before the end of study.



Paulina Ucieklak-Jeż

## **Uwagi na temat metod pomiaru nierówności zdrowotnej i sprawiedliwości w finansowaniu opieki zdrowotnej**

### **1. Wstęp**

Ogólny wskaźnik jakości funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej został zaproponowany w 2000 r. przez ekspertów Światowej Organizacji Zdrowia. Wskaźnik jakości funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej jest oparty na pięciu aspektach społecznych, tj.: poziom zdrowotności, dystrybucja zdrowotności, poziom wrażliwości systemu, dystrybucja wrażliwości systemu, sprawiedliwość w finansowaniu (por. [7]).

Jednym z aspektów jakości funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej jest dystrybucja zdrowotności – to niwelowanie zróżnicowania poziomu zdrowia, czyli redukcja nierówności w zdrowiu wśród badanych populacji.

Obserwacja i analiza nierówności zdrowotnej w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat stała się ważnym celem w programach polityki zdrowotnej, ponieważ ocena średniego stanu zdrowia populacji była już niewystarczająca do oceny poziomu zdrowotności danego kraju (por. [1, 9]). Na ogół stan zdrowia populacji krajów rozwiniętych uległ w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat znacznej poprawie, jednak podczas prowadzonych badań zaobserwowano (por. [2, 9]), że następuje widoczna poprawa stanu zdrowia ludzi należących do uprzywilejowanych grup społecznych, a nierówności zdrowotne pomiędzy grupami społecznymi stale się zwiększają.

Z powodu braku danych porównawczych dotyczących wskaźników socjo-ekonomicznych w krajach rozwijających się (por. [1]) na początku XXI w. badania nierówności zdrowotnej prowadzone były przede wszystkim w państwach rozwiniętych gospodarczo, a większość opisanych w literaturze pomiarów nierówności stanu zdrowia zawiera informacje o zróżnicowaniu średniego stanu zdrowia wyłącznie dla wyróżnionych grup społecznych.

Ocena nierówności zdrowotnej populacji jest możliwa tylko, gdy dysponujemy subiektywnymi danymi zgromadzonymi podczas badań sondażowych. Kwestionariusze przeprowadzone w celu uzyskania danych do pomiaru nierówności zdrowotnej zaprezentowano w załączniku 1.

Drugim omawianym aspektem jakości funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej są nierówności w sprawiedliwości finansowania opieki zdrowotnej. Według Światowej Organizacji Zdrowia sprawiedliwość wydatków ponoszonych przez gospodarstwa domowe na rzecz systemu zdrowotnego wymaga, aby opłaty na system ochrony zdrowia były zorganizowane w taki sposób, aby ciężar tych płatności pozostał na podobnym poziomie dla wszystkich rodzin. Jednakowe obciążenie wydatkami ponoszonymi przez gospodarstwa domowe zdefiniowano jako równą część możliwości płatniczych każdego gospodarstwa domowego CTP *capacity to pay* (por. [14]).

Stosunek opłat zdrowotnych każdego gospodarstwa domowego do jego możliwości płatniczych nazwano finansowym wkładem gospodarstwa domowego HFC (*household financial contribution*). Jeżeli wszystkie gospodarstwa domowe wpłacą taki sam udział ich CTP (*capacity to pay*), finansowy wkład gospodarstw domowych HFC (*household financial contribution*) każdego gospodarstwa domowego będzie równy stosunkowi ogólnych wydatków danego kraju na całość kosztów opieki zdrowotnej HE (*health expenditure*) do jego ogólnych możliwości płatniczych (por. [15]).

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja wybranych metod pomiaru nierówności zdrowotnej i finansowej w systemie opieki zdrowotnej. W artykule przedstawiono metodę szacowania wskaźnika równości przeżycia dzieci ECS (*Equality of child survival*) i metodę szacowania wskaźnika sprawiedliwości wkładu finansowego FFC (*Fairness in financial contribution*).

## 2. Metoda oceny nierówności zdrowotnej

Przeżycie pierwszych dwóch lat życia przez dzieci jest ważnym miernikiem zdrowia populacji. Miernik ten stał się punktem wyjścia do oceny statusu zdrowotnego mierzonego wskaźnikiem równości przeżycia dziecka ECS (*Equality of child survival*).

Zakłada się, że badana populacja obejmuje wszystkie dzieci urodzone żywe w danym okresie w danym kraju. W idealnych warunkach moglibyśmy obserwować okres, który każde z dzieci miałyby przeżyć od urodzenia do osiągnięcia wieku dwóch lat, a następnie zastosować kryterium nierówności w oparciu o rozkład przewidywanego czasu przeżycia. Wnioskowanie na podstawie da-

nych dychotomicznych<sup>1</sup> odnośnie przeżycia dziecka wymaga dokonania kilku przekształceń.

Pierwszym krokiem jest oszacowanie rozkładu prawdopodobieństwa zgonu wśród dzieci w każdej badanej populacji. Główną trudnością metodologiczną jest w tym wypadku to, że dla każdego dziecka dysponujemy wyłącznie dychotomiczną informacją o zgonie lub przeżyciu do drugiego roku życia, nie mając informacji o prawdopodobieństwie zgonu w tym okresie (por. [1]).

W celu oszacowania tego prawdopodobieństwa rozważa się, jako punkt wyjścia, prawdopodobieństwa zgonu lub przeżycia dwóch lat dzieci mających tę samą matkę. Zakłada się, że każde dziecko tej samej matki ma takie samo prawdopodobieństwo przeżycia, lecz prawdopodobieństwa te są różne w różnych rodzinach. Zakłada się także, że zgony dzieci w tej samej rodzinie są zdarzeniami niezależnymi. Przy tych założeniach szukane prawdopodobieństwa zgonu można obliczyć, korzystając z rozkładu dwumianowego o różnych parametrach w różnych rodzinach badanej populacji.

Niech  $\pi$  oznacza prawdopodobieństwo zgonu dla każdego z dzieci w danej rodzinie. Liczba zgonów dzieci w danej rodzinie ( $Y$ ) ma więc rozkład dwumianowy o wartości oczekiwanej  $n\pi$  i wariancji  $n\pi(1-\pi)$ , gdzie  $n$  oznacza ilość dzieci w tej rodzinie (por. [2]).

Dla każdej rodziny ( $i$ ) rozkład dwumianowy może zostać więc zapisany jako:

$$\Pr(Y_i = y_i | \pi, n) = \binom{n_i}{y_i} \pi^{y_i} (1 - \pi)^{n - y_i} \quad (1)$$

a estymatorem prawdopodobieństwa zgonu dzieci w wieku do 2 lat ( $\pi$ ) dla całej populacji jest wyrażenie

$$\hat{\pi} = \sum_i^N y_i / \sum_i^N n_i = \frac{1}{N} \sum_i^N (y_i / n_i) \quad (2)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę rodzin, a wariancję tego estymatora można określić jako  $n \hat{\pi}(1 - \hat{\pi})$ .

Następnie uchyla się założenie, że prawdopodobieństwo zgonu dziecka ( $\pi$ ) jest stałe w każdej rodzinie; prawdopodobieństwa zgonu dziecka w różnych rodzinach można wtedy określić przy pomocy dwu-parametrowego rozkładu beta (por. [1]).

<sup>1</sup> Dane dychotomiczne to dane dwuwartościowe. Zmienne są na skali dychotomicznej, gdy przyjmują tylko dwie wartości.

Oznacza to, że każde dziecko danej matki będzie miało takie samo prawdopodobieństwo zgonu,  $\pi$ , ale te prawdopodobieństwa będą się różnić w różnych rodzinach, zgodnie z rozkładem beta (por. [2, 3]).

Funkcję gęstości rozkładu beta można określić jako:

$$f(\pi|a, b) = \beta^{-1}(a, b) \pi^{a-1} (1 - \pi)^{b-1} \quad (3)$$

gdzie  $a$  i  $b$  to parametry rozkładu, a

$$\beta(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a + b) \quad (4)$$

Następnie stosuje się reparametryzację Prentice'a, Kinga i Palmquista (por. [1, 2]):

$$\gamma = (a + b)^{-1} \quad (5)$$

$$\pi = a(a + b)^{-1} \quad (6)$$

Nadzieja matematyczna w tak określonym rozkładzie beta jest równa  $\pi$ , a  $\gamma$  jest miarą zróżnicowania wartości zmiennej. Wariancję omawianego rozkładu beta można zapisać jako

$$V(\pi) = \frac{ab}{(a + b)^2} \frac{1}{a + b + 1} = \frac{\pi(1 - \pi)}{1 + \gamma^{-1}} \quad (7)$$

W populacji, w której rozkład ryzyka zgonu byłby zgodny z wyżej określonym rozkładem beta, średnie ryzyko zgonu byłoby równe  $\pi$ , a jego wariancja  $V(\pi)$ .

Połączenie dwumianowego rozkładu ogólnej liczby zgonów dzieci w danej rodzinie, z rozkładem beta liczby zgonów dzieci w różnych rodzinach prowadzi do rozkładu beta-dwumianowego<sup>2</sup>. Prentice wykazał, że rozkład ten pozwala z dobrym przybliżeniem obliczyć szukane prawdopodobieństwo zgonu dzieci do dwóch lat życia. Dla danej populacji szuka się jednego rozkładu beta – jako najbardziej prawdopodobnego rozkładu beta, z którego mógłby pochodzić zaobserwowany rozkład zgonów. Dla każdej populacji szacuje się jedną wartość parametru  $\pi$  i jedną wartość parametru  $\gamma$ .

Kolejnym krokiem jest oszacowanie przewidywanego czasu przeżycia w ciągu pierwszych dwóch lat życia ( $S$ ) na podstawie prawdopodobieństwa zgonu oszacowanego w wyżej opisany sposób, a następnie mierzy się nierówność w czasie przeżycia. Oczekiwany czas przeżycia można obliczyć wg wzoru (por. [2]):

<sup>2</sup> Model ten jest szeroko stosowany w badaniach biomedycznych, najczęściej do badania prawdopodobieństwa przeżycia zwierząt w miotach.

$$S = \frac{1}{{}_2m_0} - \frac{e^{-2{}_2m_0}}{2{}_2m_0} \quad (8)$$

gdzie  $S$  to przewidywany czas przeżycia, a  ${}_2m_0$  jest współczynnikiem zgonów w ciągu pierwszych dwóch lat życia. Z kolei  ${}_2m_0$  można obliczyć na podstawie prawdopodobieństwa zgonu w ciągu pierwszych dwóch lat życia,  ${}_2q_0$ :

$${}_2m_0 = \frac{\ln[1-{}_2q_0]}{2} \quad (9)$$

Aby dokonać oceny stopnia nierówności zdrowotnej w populacji, trzeba dokonać wyboru miernika nierówności. We wzorze (10), w odróżnieniu od (11), nie uwzględnia się w liczniku średniego czasu przeżycia (por. [2]):

$$II[\alpha, \beta] = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |S_i - S_j|^\alpha}{2n^2 \bar{S}^\beta} \quad (10)$$

gdzie  $S_i$  jest oczekiwanym czasem przeżycia o okresie od momentu urodzenia do wieku dwóch lat  $i$ -tego dziecka, a  $s$  jest przeciętną dla populacji. W mierniku tym porównuje się czas przeżycia każdego dziecka z każdym innym w badanej populacji.

$$IM[\alpha, \beta] = \frac{\sum_{i=1}^n |S_i - \bar{S}|^\alpha}{n \bar{S}^\beta} \quad (11)$$

Miernik  $IM$  zbudowany jest w oparciu o odchylenia wartości indywidualnych (dla  $i$ -tego dziecka) od średniej dla badanej populacji, a  $\alpha > 1$  jest wagą przywiązywaną do obserwacji pochodzących ze skrajnych części omawianego rozkładu; gdy  $\alpha = 1$  uwzględnia się je w stopniu minimalnym.  $\beta \in [0,1]$  określa stopień, w jakim odchylenia od średniej są odchyleniami bezwzględnymi bądź względnymi w odniesieniu do średniej. Dla  $\beta = 0$  bierze się pod uwagę tylko odchylenia bezwzględne, dla  $\beta = 1$  – względne. Dla celu analizy empirycznej, miernik nierówności zdrowotnej (II) określono (por. [3]) jako:

$$II = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |s_i - s_j|^3}{2n^2 \bar{s}^{0,5}} \quad (12)$$

gdzie  $s_i$  jest przewidywanym czasem przeżycia między urodzeniem a drugim rokiem życia  $i$ -tego dziecka, a  $(\bar{s})$  jest przewidywanym średnim czasem przeżycia w ciągu pierwszych dwóch lat życia w danej populacji.

E. Gakidou i G. King (por. [1]) wykorzystali opisaną metodę badania nierówności przeżycia dzieci do pomiaru nierówności zdrowotnej w 50 krajach. Do pomiaru nierówności zdrowotnej wykorzystali dane zgromadzone w sondażu demograficzno-zdrowotnym (DHS) przeprowadzonym w latach od 1987 do 1997.

Stopień sprawiedliwości dystrybucji zdrowotności oszacowany został natomiast przez Światową Organizację Zdrowia w 2000 roku dla 191 krajów za pomocą wskaźnika równości przeżycia dzieci ECS (*Equality of child survival*) (por. [11, 12]).

Wskaźniki równości przeżycia dzieci ECS (*Equality of child survival*) w badanych populacjach obliczono ze wzoru:

$$ECS = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |s_i - s_j|^3}{2n^2 \bar{s}^{-0,5}} \right] \quad (13)$$

### 3. Metoda oceny nierówności finansowej

Wiele powszechnie używanych mierników nierówności finansowej można zaliczyć do dwóch grup: mierzących różnice między jednostkami oraz mierzące średnie różnice indywidualne. Pomiar indywidualny dotyczy różnic między każdą parą jednostek lub gospodarstw domowych w próbie. Taki pomiar indywidualny stosujemy, gdy badamy różnicę między jednostkowymi wydatkami na opiekę zdrowotną w odniesieniu do średnich wydatków w populacji. Do takiej grupy pomiarów należy współczynnik Giniego, powszechnie używany do charakterystyki rozkładu dochodu (por. [6]).

Pomiar średniej różnicy indywidualnej w kontekście oszacowania HFC (*household financial contribution*) wynika z normatywnych rozważań leżących u podstawy zasady jednakowego obciążenia gospodarstw domowych wydatkami na rzecz systemu zdrowotnego.

Średnią indywidualną różnicę [wzór (11), w tym przypadku IMD (*individual-mean difference*)] nierówności rozkładu zmiennej  $y$  [w tym przypadku HFC (*household financial contribution*)] obliczamy jako (por. [2, 8, 14]):

$$IMD(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \mu|^\alpha}{\eta \mu^\beta} \quad (14)$$

gdzie  $y_i$  oznacza finansowy wkład gospodarstwa domowego HFC (*household financial contribution*)  $i$ ,  $\mu$  jest wysokością średnich wydatków finansowych (tzn. średnim HFC), natomiast  $n$  jest liczbą gospodarstw domowych w próbie.

Dla obliczenia wariancji średniego finansowego wkładu gospodarstwa domowego przyjmuje się, że  $\alpha = 2$  a  $\beta = 0$ , a odchylenie standardowe wyraża się wzorem

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (HFC_i - \mu)^2}{n}} \quad (15)$$

gdzie  $HFC_i$  oznacza indywidualne wydatki gospodarstw domowych  $i$  a  $\mu$  oznacza średnią HFC. W oparciu o zasadę jednakowego obciążenia wydatkami ponoszonymi przez gospodarstwa domowe, można zaproponować alternatywny miernik, związany z odchyleniem standardowym. Przy założeniu, że należy skomasować koszty opieki zdrowotnej, a obciążenie powinno zostać podzielone jednakowo na wszystkie gospodarstwa domowe, można wnioskować, że rozkładu HFC nie należy porównywać ze średnią HFC, ale raczej z poziomem, który jest równy stosunkowi ogólnych kosztów opieki zdrowotnej do ogólnej zdolności płatniczej (por. [8]).

Załóżmy, że system opieki zdrowotnej zabiera pewną kwotę dochodu (*THE*)

$$THE = HFC_1 CTP_1 + HFC_2 CTP_2 \dots + HFC_n CTP_n \quad (16)$$

gdzie  $HE_i$  oznacza całkowitą finansową składkę zdrowotną gospodarstwa domowego  $i$  a  $CTP_i$  oznacza jego zdolność płatniczą. Zgodnie z definicją sprawiedliwości mówiącą, że każde gospodarstwo powinno wpłacić taką samą część w stosunku do swojej zdolności płatniczej (por. [5]), mamy:

$$HFC_1 = HFC_2 \dots = HFC_n = k \quad (17)$$

Podstawiając równanie (17) do równania (16), otrzymujemy:

$$\sum HE_i = k * \sum CTP_i \quad (18)$$

czyli

$$k = \frac{\sum HE_i}{\sum CTP_i} = HFC_0 \quad (19)$$

HFC<sub>0</sub> to wydatki na opiekę zdrowotną, jakie ponosiłyby wszystkie gospodarstwa domowe zgodnie z zasadą równego obciążenia.

Do oceny sprawiedliwości finansowania opieki zdrowotnej można zastosować także m.in. wskaźniki (por. [14, 15, 16]):

- wskaźnik Theila,
- średnie odchylenie logarytmiczne MLD,
- wskaźnik Atkinsona,
- wskaźnik sprawiedliwości wkładu finansowego FFC.

Wskaźniki te należą do grupy mierników opartych o średnią różnicę indywidualnej pod względem nierówności w tym sensie, że porównuje się indywidualne wydatki do średniej. Formułę wskaźnika Theila można zapisać w postaci:

$$T = \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{\mu} \ln\left(\frac{y_i}{\mu}\right) \quad (20)$$

gdzie  $\mu$  oznacza średni dochód, a definiujemy  $y_i = 1 - \text{HFC}_i$ . Równanie (20) można wtedy zapisać jako (por. [14]):

$$T = \frac{1}{n} \sum \frac{1 - \text{HFC}_i}{1 - \text{HFC}_0} \ln\left(\frac{1 - \text{HFC}_i}{1 - \text{HFC}_0}\right) \quad (21)$$

Wskaźnik Theila przyjmuje wartości z przedziału  $\langle 0; \ln n \rangle$ . Wartość wskaźnika Theila jest równa zero przy rozkładzie idealnie równomiernym, a im silniejsza nierówność finansowa, tym wyższa wartość wskaźnika.

Inny miernikiem jest średnie odchylenie logarytmiczne (MLD) zdefiniowane jako (por. [14]):

$$MLD = \frac{1}{n} \sum \ln\left(\frac{\mu}{y_i}\right) \quad (22)$$

Taką samą poprawkę można zastosować do MLD

$$MLD = \frac{1}{n} \sum \ln\left(\frac{1 - \overline{\text{HFC}_0}}{1 - \text{HFC}_i}\right) \quad (23)$$

gdzie  $y_i$  oznacza dochód gospodarstwa domowego  $i$ , a  $\mu$  oznacza średni dochód wszystkich gospodarstw domowych. MLD równy jest zero w przypadku absolutnej równości, a wyższe wartości wskazują na rosnącą nierówność finansową.

W konstrukcji wskaźnika Atkinsona przyjmuje się dodatkowe założenia co do postaci funkcyjnej leżącej u podstaw funkcji socjalnej, obciążeń socjalnych i związku między transferami i zmianami nierówności.



Przypuśćmy, że funkcja użyteczności w każdym gospodarstwie domowym jest taka sama i przybiera postać:

$$U(y_i) = a + b \frac{y_i^{(1-e)}}{1-e} \quad (24)$$

dla  $e$ , które nie jest równe 1, oraz

$$U(y) = \ln(y) \quad (25)$$

kiedy  $e = 1$ . Im większa wartość  $e$  ( $e$  przyjmuje wartości od 0 do 1), tym większe zainteresowanie społeczne nierównością finansową. Miernik Atkinsona wskazuje stopień nierówności poprzez odjęcie odchyłeń od tego maksimum. Miernik ten można wyprowadzić w następujący sposób:

1. Należy określić wyrównany poziom dochodu,  $y_e$ , który, przydzielony każdemu członkowi populacji, prowadziłby do tego samego poziomu pomocy społecznej ( $W^*$ )

$$W^* = a + b \sum \left( \frac{y_i^{(1-e)}}{1-e} \right) = \frac{1}{n} \sum U(y_e) = U(y_e), \quad (26)$$

po podstawieniu do równania (24) mamy:

$$y_e = \left( \frac{1}{n} \sum y_i^{1-e} \right)^{\frac{1}{1-e}} \quad (27)$$

2. Następnym krokiem jest porównanie równo rozłożonego dochodu ( $y_e$ ) i średniego dochodu ( $\mu$ ).

Wskaźnik Atkinsona ( $A$ ) można teraz zapisać jako:

$$A = 1 - \frac{y_e}{\mu} = 1 - \left[ \frac{1}{n} \sum \left( \frac{y_i}{\mu} \right)^{1-e} \right]^{\frac{1}{1-e}} \quad (28)$$

Wskaźnik Atkinsona mieści się między zerem (całkowita równość) a jednością (maksymalna nierówność). Cechą wyróżniającą tego wskaźnika jest jego zdolność do wychwytywania ruchów w różnych segmentach rozkładu nierówności przy pomocy zmian w wartości parametru  $e$ .

Aby wskaźnik Atkinsona odzwierciedlał prawidłowość, że przydatność społeczna wskaźnika jest odwrotnie proporcjonalna do obciążenia płatnościami na ochronę zdrowia, należy podstawić  $y_i = 1 - \text{HFC}$  do wzoru (28), a mianowicie:

$$A = 1 - \left[ \frac{1}{n} \sum \left( \frac{1 - HFC_i}{1 - HFC_0} \right)^{1-e} \right]^{\frac{1}{1-e}} \quad (29)$$

Wskaźnik Atkinsona jest oparty o różnice i ponadto, wyrażony jest w jednostkach dających się łatwo interpretować.

Wskaźnik sprawiedliwości wkładu finansowego FFC (*Fairness in financial contribution*) został zaproponowany przez Światową Organizację Zdrowia jako charakterystyka rozkładu (HFC). Jest on zbudowany w formie odchylenia standardowego [wzór (15)], jednak aby nadać większą wagę prawej stronie rozkładu, obejmującej gospodarstwa domowe z potencjalnie wysokimi wydatkami, zamiast  $\alpha = 2$ , przyjęto  $\alpha = 3$ . Ponadto, sumę odchyleń odjęto od 1, w wyniku czego, miernik ten przybiera wartości z przedziału od 0 do 1, a stopień sprawiedliwości finansowej wzrasta w miarę, jak wskaźnik zbliża się do jedności. Wskaźnik FFC zdefiniowano więc jako:

$$FFC = 1 - \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^n |HFC_i - \mu|^3}{n}} \quad (30)$$

Poziom sprawiedliwości w finansowaniu opieki zdrowotnej oszacowany został przez Światową Organizację Zdrowia dla 191 krajów za pomocą miernika  $FFC_{WHR}$

$$FFC_{WHR} = 1 - 4 \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^n |HFC_i - \mu|^3}{0,125n}} \quad (31)$$

## Zakończenie

W przeprowadzonym w 1997 r. przez Światową Organizację Zdrowia – jedynym globalnym badaniu dotyczącym jakości funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej – wykorzystano do pomiaru wskaźniki: równości przeżycia dzieci ECS (*Equality of child survival*) i sprawiedliwości wkładu finansowego FFC (*Fairness in financial contribution*). W ogólnym rankingu, od najlepiej funkcjonującej służby zdrowia do najgorzej funkcjonującej, na 191 państw – Polska zajęła 37 miejsce, tj. ze względu na nierówność zdrowotną 5 miejsce; niestety, ze względu na sprawiedliwość w finansowaniu opieki zdrowotnej – 150 miejsce.

## Literatura

- [1] Gakidou E., King G., *An individual approach to health inequality: child survival in 50 countries*, GPE Discussion Paper Series: No. 28 WHO, Geneva 2001.
- [2] Gakidou E., Murray C.J.L., Frank J., *A framework for measuring health inequality*, [in:] Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.) *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.
- [3] Gakidou E., King G., *Measuring total health inequality: Adding individual variation to group – level differences*, in: Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.) *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.
- [4] Gakidou E., King G., *Determinants of inequality in child survival: Results from 39 countries*, [in:] Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.) *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.
- [5] Murray C.J.L., Knaul F., Musgrove Ph., Xu K., Kawabata K., *Defining and measuring fairness in financial contribution to the health system*, GPE Discussion Paper Series: No. 24, WHO, Geneva 2001.
- [6] Murray C.J.L., Xu K., Klavus J., *Assessing the distribution of household financial contributions to the health system: concepts and empirical application*, [in:] Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.), *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.
- [7] Murray C.J.L., Lauer J., *Overall health system achievement for 191 countries*, GPE Discussion Paper Series: No. 28, WHO, Geneva 2001.
- [8] Technical Consultation on Fairness on Financial Contribution to Health Systems, Geneva 2001.
- [9] Technical Consultation on the Measurement of Health Inequalities WHO, Geneva 2001.
- [10] Regional Consultation and Technical Workshop on Health Systems Performance Assessment, WHO – SEARO, New Delhi 2001.
- [11] Report of the Workshop *Health systems performance the World Health Report*, Rio de Janeiro 2000.
- [12] World Health Organization, *The World Health Report 2000. Statistical Annex*, WHO, Geneva 2000.
- [13] Xu K., Klavus J., Kawabata, Evans D.B., *Household health system contributions and capacity to pay: definitional, empirical, and technical challenges*, [in:] Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.), *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.

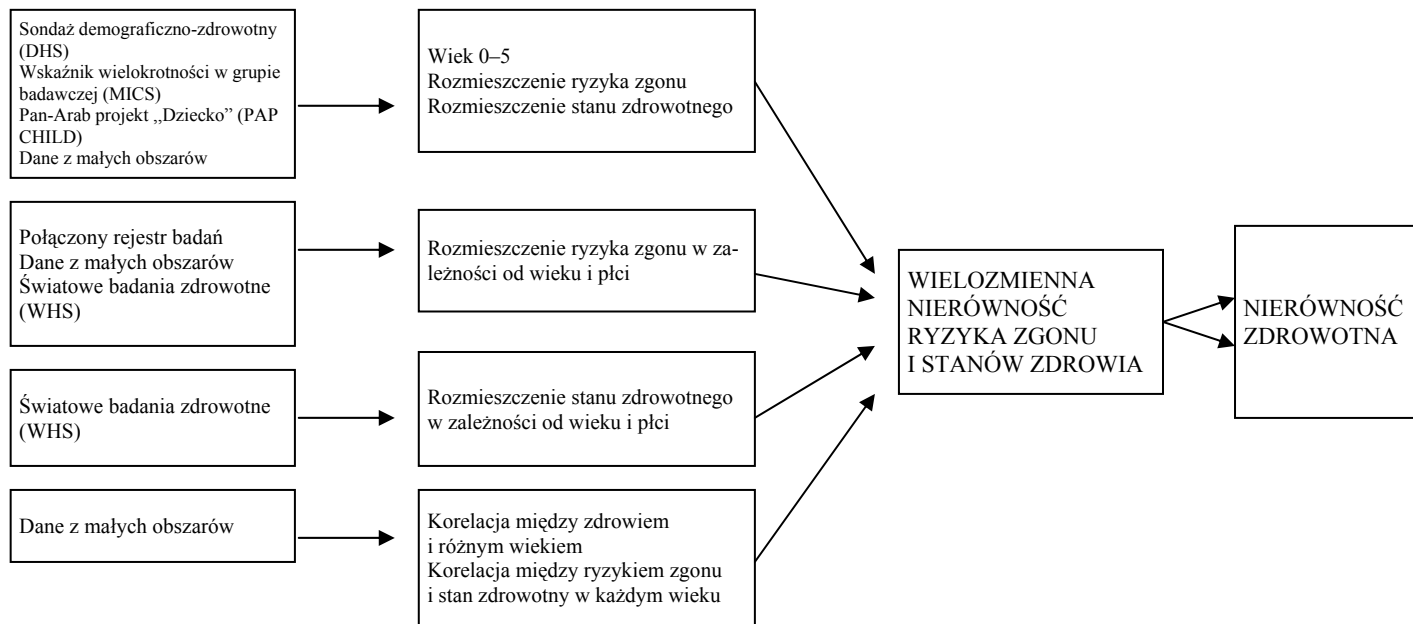
- [14] Xu K., Klavus J., Aguilar-Rivera A.M., *Summary measures of the distribution of household financial contributions to health*, [in:] Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.), *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.
- [15] Xu K., Klavus J., Evans D.B., *The Impact of Vertical and Horizontal Inequality on the fairness in financial contribution index*, [in:] Murray C.J.L., Evans D.B. (eds.), *Health systems performance assessment: debates, methods and empiricism*, WHO, Geneva 2003.

## Summary

### **Remarks on Methods of Measurement of Health Inequalities and Fairness of Financial Contribution in Health System**

Composite measure overall health system attainment is built on five social aspects: level of health, health inequality, responsiveness, responsiveness distribution and fairness of financial contributions to health. In this article methods of health inequality measurement (Equality of child survival) and Fairness in financial contribution (FFC) are presented.

## Załącznik 1



**Rys.1.** Sondáže przeprowadzone w celu uzyskania danych do pomiaru nierówności zdrowotnej

Źródło: [9]



Ewa Bitner

## **Menedżment w prywatyzowanych przedsiębiorstwach w Polsce**

### **1. Wprowadzenie**

Od 1989 roku, po transformacji systemowej w Polsce, powstała możliwość tworzenia nowej szkoły menedżmentu. Dzięki gospodarce rynkowej przedsiębiorstwa wymagały nowego stylu zarządzania. Rozpoczęły się wielkie zmiany. Również przystąpienie Polski do Unii Europejskiej spowodowało falę przemian w zarządzaniu przedsiębiorstwami.

Podczas dwudziestu lat wiele firm zmuszonych zostało do przystosowania się do nowych warunków. Zarządzanie skupiło się głównie na składnikach *hard* (finanse, technologia, marketing). Brakowało na początku świadomości, że ludzie są najważniejsi (*soft*).

W trakcie przekształceń własnościowych, drogą prywatyzacji bezpośredniej, zaczęto dostrzegać akcjonariat pracowniczy. W artykule krótko zaprezentowano jego powstanie w Polsce. Aktualnie jest powszechny poprzez funkcjonowanie na rynku wielu spółek kapitałowych – spółek akcyjnych i spółek z ograniczoną odpowiedzialnością.

Dzięki menedżmentowi, odpowiednio przygotowanemu na wprowadzenie zmian, udało się sprywatyzować kopalnie bazaltu w Polsce.

### **2. Akcjonariat pracowniczy w Polsce**

Historia akcjonariatu pracowniczego w Polsce sięga początku XX wieku. W literaturze podkreśla się, że jedną z pierwszych nowoczesnych spółek w Europie, realizujących zasadę *akcjonariatu pracowniczego*, była spółka „Gazolina”, założona w 1912 roku we Lwowie przez Mariana Wieleżyńskiego i Władysława Szaynoka (por. [12, s. 79]).

Okres powojenny w Polsce zdominowała gospodarka centralnie planowana z systemem zarządzania nakazowo-rozdzielczym. Polska Ludowa przejęła przedwojenne przedsiębiorstwa państwowe oraz powiększyła ich liczbę w drodze aktów nacjonalizacyjnych (por. [9, s. 39]). Nastąpił widoczny ich rozwój inwestycyjny. W efekcie powstał dominujący sektor gospodarczy, obejmujący wszystkie działy gospodarki narodowej. Funkcjonował prawie w całym kraju w jednolitej formie prawnej – przedsiębiorstwa państwowego. Zasady komercjalizacji przedsiębiorstw państwowych zostały odrzucone, a ich miejsce zajęły zasady rozrachunku gospodarczego jako nowej, socjalistycznej metody organizacji i funkcjonowania przedsiębiorstw państwowych (por. [5, s. 238]). Samodzielność [16] i odpowiedzialność [8] przedsiębiorstw państwowych były znacznie ograniczone. Przedsiębiorstwa państwowe miały wykonywać narzucone im plany gospodarcze. Efektywność ekonomiczna i finanse przedsiębiorstw pozostawały na dalszym planie.

W Polsce (por. [14]) oraz w innych państwach Europy Wschodniej (por. [15, s. 92]), w których po 1989 roku zaczęto dokonywać zmiany ustroju gospodarczego, prywatyzacja przedsiębiorstw państwowych miała stać się głównym narzędziem zmiany struktury podmiotowej gospodarki. Prywatyzacja miała ponadto realizować inne cele, takie jak: usunięcie źródła głównych niepowodzeń gospodarczych, za które uznano przedsiębiorstwa państwowe, rozszerzenie sektora prywatnego i pozyskanie do Polski kapitału zagranicznego, poprawę stanu budżetu państwa, rozwój akcjonariatu pracowniczego.

W przyjętych rozwiązaniach prawno-organizacyjnych nie uregulowano kwestii formalno-prawnego powstania i funkcjonowania jednostki organizacyjnej w formie „spółki pracowniczej”. Przyjęte rozwiązania prawne zakładały możliwość powstania jedynie *pracowniczego leasingu* (por. [11, s. 29–30]) (w ustawie prywatyzacyjnej) oraz możliwość udziału przedstawicieli pracowników w składzie *rad nadzorczych* (w ustawie komercjalizacyjnej).

Ze względu na brak ustawy regulującej warunki powstawania i działalności „spółek pracowniczych” (por. [11, s. 23–24]), (ustawa o pp z 1990 roku regulowała tylko warunki leasingu), to szczególna rola przypadła organowi założycielskiemu przedsiębiorstw państwowych, tj. Ministerstwu Przekształceń Własnościowych (od 1997 roku Ministerstwu Skarbu Państwa). Jego decydenci wyraźnie sprzyjali „menedżeryzacji” spółek leasingowych. Nadużywano nazwy „spółka pracownicza” przez zdominowany udziałowo menedżment (por. [10, s. 89]).

*Ustawa o komercjalizacji i prywatyzacji przedsiębiorstw państwowych* ulegała nowelizacji w latach 2002–2003. Wprowadzane były kolejne zmiany w dziennikach ustaw: DzU 2002 nr 113 poz. 984, DzU nr 171 poz. 1397, aż do ujednoczenia tekstu i zmiany nazwy – *o komercjalizacji i prywatyzacji*, zamieszczonej w DzU 2002 nr 240 poz. 2055.



### 3. Kontrakt menedżerski formą usprawnienia zarządzania przedsiębiorstwem

Dążąc do usprawnienia zarządzania przedsiębiorstwami państwowymi i przez to – poprawy efektywności ich działania, w 1991 r. wprowadzono możliwość zarządzania nimi na czas oznaczony przez zarządcę, osobę fizyczną lub prawną (firma zarządzająca), działającego na podstawie zawartego z nim przez organ założycielski (lub ministra skarbu) **kontraktu menedżerskiego** (umowy o zarządzanie). Kontrakt, mający charakter cywilnoprawny, precyzuje obowiązki zarządcy w zakresie bieżącego zarządzania, zasady jego wynagradzania, kryteria oceny efektywności zarządzania i zasady odpowiedzialności zarządcy za powierzony majątek przedsiębiorstwa. Z chwilą zawarcia umowy i objęcia obowiązków przez zarządcę następuje rozwiązanie organów samorządu pracowniczego i odwołanie dotychczasowego dyrektora. Organ założycielski powinien natomiast powołać radę nadzorczą obejmującą przedstawicieli pracowników, sprawującą nadzór nad działalnością przedsiębiorstwa. Przypadki zarządzania przedsiębiorstwem państwowym przez zarządcę są w Polsce niezbyt częste i brakuje pełnej oceny tej formy zarządzania [6]. Obecnie zarządzanie przedsiębiorstwem na podstawie kontraktu menedżerskiego występuje także w przedsiębiorstwach prywatnych. Między innymi, ze względu na zastępowanie struktur hierarchicznych, w których widoczna jest przewaga organizacji nad samoregulacją, strukturami funkcjonalnymi, w których samoregulacja zyskuje na znaczeniu a organizacja stosowana jest w koniecznym zakresie [18, 19].

W przedsiębiorstwie o strukturze funkcjonalnej pojawia się zapotrzebowanie na pracowników o większej samosterowności, gdyż głównie dzięki nim wzrasta efektywność firm [20, 21].

Panuje przekonanie, że przedsiębiorstwo państwowe, niezależnie czy zarządzane przez zależnego od administracji państwowej dyrektora, zarządcę czy załogę, nie zapewnia ani przedsiębiorczości, ani efektywności ekonomicznej. Odpowiedzialność jest rozmyta, a na skutek ich dużego uzwiązkowienia i upolitycznienia cele ekonomiczne nie są dla ich kierownictw najważniejsze. Widocznym wyrazem upolitycznienia przedsiębiorstw państwowych jest to, że po każdej zmianie ekipy rządowej następuje poważna wymiana członków rad nadzorczych i zarządów tych przedsiębiorstw, przy czym nowi ludzie nie zawsze są bardziej kompetentni od swych poprzedników. Starają się oni realizować cele i oczekiwania władzy nadrzędnej, natomiast pracownicy wykazują postawę roszczeniową niezależnie od wyników ekonomicznych przedsiębiorstwa. Podkreśla się przy tym, że „skuteczność obecnego nadzoru właścicielskiego nad firmami państwowymi jest znacznie niższa w porównaniu do skuteczności tego nadzoru w firmach prywatnych, w tym prywatnych spółkach kapitałowych w Polsce

i za granicą” (por. [13, s. 188]). Większa sprawność i efektywność działania wymaga prywatyzacji przedsiębiorstw państwowych.

Należy jednak zwrócić uwagę na cechy szczególne kontraktu menedżerskiego. Zakłada on zdecydowanie większą **dyspozycyjność** pracownika, **zadaniowy charakter pracy** i wymaga szczególnej **lojalności** i **współdziałania** obu stron umowy. Menedżer podpisując kontrakt, zobowiązuje się przestrzegać **zakazu konkurencji**. Po rozwiązaniu kontraktu zobowiązany jest do niepodejmowania pracy w przedsiębiorstwie konkurencyjnym przez określony czas. W przypadku niewywiązania się z tego zobowiązania, zmuszony będzie do zapłacenia wysokiego odszkodowania.

**Odpowiedzialność menedżera** z tytułu sprawowania zarządu opiera się na **zasadzie winy**. Odpowiada za pełną szkodę, którą spowodował niewykonaniem lub nienależytym wykonaniem swego zobowiązania. Zgodnie z art. 361 §1 *Kodeksu cywilnego*, szkoda obejmuje nie tylko straty poniesione przez poszkodowanego, lecz również korzyści, które mógłby osiągnąć, gdyby mu szkody nie wyrządzono.

**Zaletą kontraktu menedżerskiego** jest to, iż jego zawarcie jest często jedyną metodą pozyskania kluczowych dla danego zakładu menedżerów, ponieważ nie będąc pracownikami – nie podlegają układowi zbiorowemu.

#### **4. Kontrakty menedżerskie w prywatyzowanych przedsiębiorstwach górnictwa odkrywkowego**

Funkcjonowanie przedsiębiorstw w systemie gospodarki planowej (centralnie sterowanej) wytworzyło jednostronny sposób postrzegania jego wartości – jako substancji majątkowej. Pomijano istotny element, jakim jest zdolność podmiotu gospodarczego do generowania przychodów i zysków, a tym samym przynoszenia swoim właścicielom wymiernych korzyści finansowych. Logika gospodarki rynkowej sprawia, iż przedsiębiorstwo oceniane jest przez potencjalnych inwestorów głównie przez pryzmat zdolności do generowania dochodów. Związane to jest m.in. z właściwą organizacją produkcji i systemu zarządzania przedsiębiorstwem, konkurencyjnością wyrobów oraz fachowością zatrudnionych pracowników. Wynika z tego, iż wartość rynkowa przedsiębiorstwa może niekiedy znacznie odbiegać (in „+” lub in „-”) od wartości jego substancji majątkowej (por. [17, s. 28]).

W pracy [2] zwrócono m.in. uwagę na rolę kontraktów menedżerskich w prywatyzowanych przedsiębiorstwach górnictwa odkrywkowego. Badane przedsiębiorstwa faktycznie były doskonale zarządzane poprzez zarządców na mocy zawartych z nimi kontraktów menedżerskich.

W kopalniach bazaltu na Dolnym Śląsku zawarte były kontrakty menedżerskie:

- a) 1993–2004 – w **Lubaniu** pomiędzy Zarządcą a Ministrem Skarbu Państwa, a od 22.07.2004 roku stroną umowy jest Łużycka Kopalnia Bazaltu „KSIĘGINKI” SA reprezentowana przez Radę Nadzorczą – Przewodniczącą Rady Nadzorczej;
- b) od 1991 roku – w **Wilkowie** zarządca pracował na podstawie umowy o zarządzaniu przedsiębiorstwem państwowym, a obecnie stroną nowej umowy jest Rada Nadzorcza PGP „BAZALT” w Wilkowie.

Poziom kwalifikacji i doświadczeń kadry menedżerskiej firmy, który ma podstawowe znaczenie dla sukcesu zaplanowanego przedsięwzięcia, ocenia się bardzo wysoko. Ma bardzo istotne znaczenie dla sukcesu spółki w przyszłości. W obu kopalniach było to zagwarantowane. Współwłaściciele posiadali bogate doświadczenie związane z prowadzeniem firmy i sprawowali w niej funkcje menedżerskie od lat.

## 5. Analiza ekonomiczno-finansowa zarządzanych przedsiębiorstw

Przedmiotem analizy ekonomicznej przedsiębiorstwa są jego wyniki, stan i pozycja oraz organizacja i metody działania (por. [3, s. 11]).

**Analiza wyników** obejmuje rezultaty ilościowe i jakościowe, w ścisłym ich powiązaniu, związane z osiągnięciami przedsiębiorstwa w sferze produkcji, sprzedaży i zakupów, gospodarowania zasobami ludzkimi itp.

**Analiza stanu i pozycji** to porównywanie faktów i zjawisk gospodarczych występujących w danym przedsiębiorstwie na tle zmian zachodzących w jego otoczeniu.

**Analiza organizacji i metod działania** zajmuje się m.in. oceną jakości zorganizowania procesów technologicznych, transformacji zasileń materiałowo-energetycznych oraz ustaleniem zakresu wykonywania zadań przez przedsiębiorstwo, czy wskazywaniem negatywnych czynników utrudniających realizację jego celów.

Rozpatrując przedmiot analizy finansowej w przedsiębiorstwie jako złożoną całość, wyróżnić można dwa podstawowe jego elementy (por. [1, s. 11]):

- stan finansowy,
- wyniki finansowe.

**Stan finansowy** jest ujęciem statycznym przedmiotu analizy, ustalonym na określony moment. Obejmuje on stan wyposażenia przedsiębiorstwa w składniki majątku trwałego i obrotowego, środki zaangażowane w inwestycje i wartości niematerialne oraz finansowe pokrycie tych składników z kapitałów własnych lub obcych. Wiąże się to z kształtowaniem sytuacji finansowej przedsiębiorstwa,

jego zdolnością płatniczą i kredytową, efektywnym lokowaniem wolnych środków pieniężnych, w tym zagospodarowaniem osiągniętych nadwyżek finansowych.

**Wyniki finansowe** są ujęciem dynamicznym przedmiotu analizy. Ustala się je za pewien okres jako sumę wyników narastających w ciągu miesiąca, kwartału lub roku. Omawiane wyniki finansowe to zyski lub straty ujęte w wielkościach brutto lub netto. Oddziałują na nie takie czynniki, jak przychody ze sprzedaży, koszty własne, rozliczenia w formie podatków, dotacji, dywidend itp. Określają je wskaźniki rentowności jako relację wyniku finansowego do obrotu, zaangażowanych zasobów osobowych, majątkowych lub kapitałowych.

Najważniejsze znaczenie mają analizy roczne, służące ocenie działalności przedsiębiorstwa i jego kierownictwa w podstawowym okresie rozliczeniowym. Oparte są one na rocznych sprawozdaniach finansowych i z jednej strony umożliwiają ocenę stanu i wyników finansowych, z drugiej – tworzą przesłanki do ukierunkowania dalszej działalności przedsiębiorstwa (por. [1, s. 13–14]).

Dla prawidłowej oceny sytuacji przedsiębiorstwa, należy starannie przeanalizować zawarte w sprawozdaniach finansowych dane. Najlepiej wykorzystać do tego analizę wskaźnikową.

Syntetyczne wskaźniki ekonomiczno-finansowe wykorzystywane przy przeprowadzaniu analiz w prywatyzowanych przedsiębiorstwach i spółkach to przede wszystkim:

- **wskaźniki płynności:**
  - wskaźnik płynności bieżącej,
  - wskaźnik wysokiej płynności,
  - wskaźnik pokrycia zobowiązań nadwyżką finansową,
  - wskaźnik cash-flow,
- **wskaźniki rentowności (zyskowności):**
  - wskaźnik zyskowności netto (ROS),
  - wskaźnik zyskowności kapitału własnego (ROE),
  - wskaźnik zyskowności aktywów (ROA),
  - wskaźnik zwrotu kapitału,
  - wskaźnik rentowności majątku,
- **wskaźniki sprawności działania:**
  - wskaźnik należności (w dniach),
  - wskaźnik zobowiązań (w dniach),
  - wskaźnik rotacji zapasów (w dniach),
  - wskaźnik udziału kapitału własnego w finansowaniu aktywów,
  - wskaźnik udziału kapitału obcego w finansowaniu aktywów,
  - wskaźnik poziomu zadłużenia kapitałowego,
  - wskaźnik rotacji aktywów.

**Wskaźniki płynności** pokazują zdolność jednostki do wywiązywania się z krótkoterminowych zobowiązań. Do tej oceny wyliczane są:

- wskaźnik płynności bieżącej – stosunek aktywów bieżących do zobowiązań bieżących,
- wskaźnik płynności szybki jako stosunek aktywów płynnych do bieżących zobowiązań,
- wskaźnik pokrycia zobowiązań nadwyżką finansową,
- wskaźnik cash-flow.

Za zadowalające przyjmuje się: wskaźnik płynności bieżącej w granicach 1,2 i więcej, wskaźnik szybki wynoszący 0,6–1,0 i więcej, wskaźnik pokrycia zobowiązań nadwyżką finansową wynoszący 0,6–1,0 i więcej a wskaźnik cash-flow 0,1 i więcej.

Druga grupa wskaźników – **wskaźniki zyskowności (rentowności)** są miernikami informującymi o szybkości zwrotu majątku i kapitału własnego.

Wylicza się:

- wskaźnik zyskowności netto – jako relację zysku netto do wielkości sprzedaży netto,
- wskaźnik zyskowności kapitału własnego – jako relację zysku netto do kapitału własnego,
- wskaźnik zyskowności aktywów – jako stosunek zysku netto do aktywów ogółem,
- wskaźnik zwrotu kapitału – jako stosunek zysku netto powiększonego o amortyzację do kapitału podstawowego,
- wskaźnik rentowności majątku – jako stosunek zysku netto do majątku trwałego.

*Wskaźnik zyskowności aktywów* jest ogólnym miernikiem podnoszenia efektywności firmy. Określa on zdolność aktywów do generowania zysku, czyli pokazuje, jak efektywnie jednostka zarządza aktywami. Im wartość tego wskaźnika jest wyższa, tym korzystniejsza jest sytuacja finansowa spółki.

*Wskaźnik rentowności majątku* jest ogólnym miernikiem produktywności majątku w wypracowywaniu zysku. Im wartość tego wskaźnika jest wyższa, tym korzystniejsze jest wykorzystanie majątku dla wzrostu dochodu firmy.

Ostatnią grupę wskaźników stanowią **wskaźniki sprawności działania**. Służą one do pomiaru efektywności wykorzystania zasobów majątkowych.

Wyliczany jest:

- wskaźnik należności – liczony w dniach,
- wskaźnik zobowiązań – liczony w dniach,
- wskaźnik rotacji zapasów – liczony w dniach,
- wskaźnik udziału kapitału własnego w finansowaniu aktywów,
- wskaźnik udziału kapitału obcego w finansowaniu aktywów,

- wskaźnik poziomu zadłużenia kapitałowego,
- wskaźnik rotacji aktywów.

*Wskaźnik należności* – jako stosunek należności i ilości dni w roku do przychodów. Obrazuje on efektywność gospodarowania w firmie oraz zdolność kierownictwa do efektywności rozliczeń windykacyjnych z kontrahentami firmy.

*Wskaźnik zobowiązań* – jako stosunek zobowiązań i ilości dni w roku do przychodów. Obrazuje on możliwość częściowego kredytowania firmy środkami zewnętrznymi (od kontrahentów firmy).

*Wskaźnik rotacji zapasów* – jako stosunek zapasów do kosztów i ilości dni w roku. Obrazuje on konieczność zaangażowania środków finansowych dla zapewnienia sprawnego funkcjonowania firmy. Wskaźnik ten winien być jak najmniejszy.

*Wskaźnik udziału kapitału własnego w finansowaniu aktywów* – jako stosunek kapitału własnego do aktywów. Im większy wskaźnik, tym bardziej bezpieczne i niezależne jest prowadzenie firmy.

*Wskaźnik udziału kapitału obcego w finansowaniu aktywów* – jako stosunek zobowiązań do aktywów. Im mniejszy wskaźnik, tym bardziej bezpieczne i niezależne jest prowadzenie firmy.

*Wskaźnik poziomu zadłużenia kapitałowego* – wylicza się jako stosunek zobowiązań do kapitału własnego. Im mniejszy wskaźnik, tym bardziej bezpieczne i niezależne jest prowadzenie firmy.

*Wskaźnik rotacji aktywów* – jako stosunek przychodów do aktywów. Za dawalający przyjmuje się wskaźnik powyżej 1,0.

Badanie rentowności stanowi podstawowy aspekt oceny przedsiębiorstwa zarówno ze strony osób zarządzających, jak i przez jednostki z nimi współpracujące. Badanie to prowadzi się zazwyczaj w przekroju rentowności sprzedaży, majątku i rentowności kapitałów (por. [1, s. 41]).

## **6. Efekty zarządzania menedżerów w przedsiębiorstwach górnictwa odkrywkowego**

Kadra zarządzająca, w Łużyckiej Kopalni Bazaltu „KSIĘGINKI” SA oraz PGP „BAZALT” w Wilkowie, doprowadziła do skutecznych przemian własnościowych tych kopalń.

Do oceny ekonomicznej korzyści wynikających z prywatyzacji bezpośrednio poprzez *oddanie przedsiębiorstwa do odpłatnego korzystania* posłużył model obliczeniowy [2]. Przeprowadzono analizę dla różnych wariantów ceny

przedsiębiorstwa i uzyskiwanych z tego tytułu korzyści dla Skarbu Państwa i akcjonariuszy.

Ze względu na ograniczone ramy artykułu przedstawiono tylko wyniki badań PGP „BAZALT” w Wilkowie. Przy sporządzaniu analiz uwzględniono następujące fakty:

- PGP „BAZALT” SA w Wilkowie jest nowoczesnym przedsiębiorstwem, potrafiącym sprostać konkurencji, dobrze funkcjonującym na rynku.
- Jest największym producentem kruszyw bazaltowych w Polsce, a pod względem wydobycia kamieni budowlanych i drogowych zajmuje drugie miejsce.
- Planowane w kraju inwestycje w budownictwie drogowym stwarzają przedsiębiorstwu korzystne perspektywy rozwoju.

Prognozowanie ekonomiczno-finansowych wyników sprowadza się do uzyskania trafnych prognoz strumieni finansowych przychodów i wydatków, jakie będzie uzyskiwała spółka.

Elementami strumieni przychodów są:

- kapitał zakładowy spółki,
- zysk netto,
- amortyzacja,
- zwrot kapitału obrotowego (w przypadku obniżenia poziomu zaangażowania kapitału obrotowego),
- kredyty bankowe.

W skład strumieni wydatków wchodzi:

- spłata rat kapitałowych z tytułu oddania przedsiębiorstwa do odpłatnego korzystania tzw. leasing,
- przyrost kapitału obrotowego (niezbędny na sfinansowanie przyrostu obrotów),
- wydatki inwestycyjne.

Spółka jest kontynuatorem działalności przedsiębiorstwa państwowego PGP „BAZALT” w Wilkowie. Punktem wyjścia dla prognozowania poszczególnych składników strumieni finansowych były warunki działania przedsiębiorstwa (tj. jego majątek trwały i obrotowy, wyniki ekonomiczno-finansowe, zmiany poziomu sprzedaży oraz zmiany wartości i struktury kosztów) oraz ocena szans i perspektyw rozwoju.

O możliwości rozwoju działalności przedsiębiorstwa – spółki w przyszłości, decydować będą, oprócz jego obecnych mocnych i słabych stron, także inwestycje modernizacyjno-rozwojowe i zmiany otoczenia rynkowego.

Zgodnie z opracowanym modelem obliczeniowym [2], prognozy wyników działania spółki wykonano przy założeniu, że leasing zostanie spłacony w ciągu

15 lat. Ocena ekonomiczno-finansowych wyników leasingu przez spółkę wymagała wykonania prognoz:

- wartości przychodów i kosztów operacyjnych,
- amortyzacji i kosztów finansowych,
- rachunku wyników finansowych działalności spółki,
- zapotrzebowania na kapitał obrotowy.

Symulacje działalności spółki zostały poddane obróbce statystycznej przy następujących założeniach kierunkowych:

- a) wzrost sprzedaży o dynamicznym i stabilnym charakterze,
- b) nie zakładano zmian strukturalnych dotyczących:
  - struktury zaopatrzenia,
  - struktury rodzajowej kosztów,
- c) uwzględniono zmiany strukturalne w:
  - strukturze sprzedaży,
  - sposobach prowadzenia sprzedaży.

Jednocześnie założono stały poziom wydobycia i sprzedaży produkcji w całym okresie projekcji. Natomiast wartość sprzedaży będzie ulegać zmianom poprzez ceny sprzedaży produkcji i usług. Przyjęto, że zmiany organizacyjne związane z prywatyzacją nie wpłyną na pogorszenie sprzedaży oraz zostanie utrzymany poziom zatrudnienia. W związku z tym już od pierwszego roku nastąpi sukcesywny wzrost sprzedaży produkcji i usług. Możliwe to będzie do zrealizowania dzięki dalszemu zaangażowaniu Zarządu w kształtowaniu dobrego wizerunku spółki w oczach kontrahentów, skierowaniu środków obrotowych (pochodzących z kapitału zakładowego) na zwiększenie handlu oraz zakupy maszyn i urządzeń niezbędnych do uruchomienia nowych kierunków produkcji.

Przewiduje się wolniejszy rozwój spółki, w związku z realizacją większych zobowiązań wynikających z umowy o oddanie przedsiębiorstwa do odpłatnego korzystania.

Zgodnie z Rozporządzeniem Rady Ministrów z dnia 14 grudnia 2004 roku [4], przyjęto: okres spłaty 15 lat, stopę referencyjną 9,46% oraz kwartalnie spłacaną należność za korzystanie z przedsiębiorstwa.

Dla każdej przeprowadzonej symulacji szczegółowo analizowano – zgodnie z modelem:

- zysk brutto,
- raty z tytułu odpłatnego korzystania za przedsiębiorstwo (tzw. raty leasingowe),
- zysk netto (po pokryciu kosztów),
- wartości amortyzacji, uwzględniające umorzenie dotychczasowego majątku oraz nowe inwestycje,
- generowany coroczny strumień pieniężny.



Symulacje prowadzono przy cenach za przedsiębiorstwo: 30 mln. zł, 31 mln. zł, 32 mln. zł, 34 mln. zł i 35 mln. zł.

Każdorazowo prowadzono szczegółowe wyliczenia według modelu obliczeniowego.

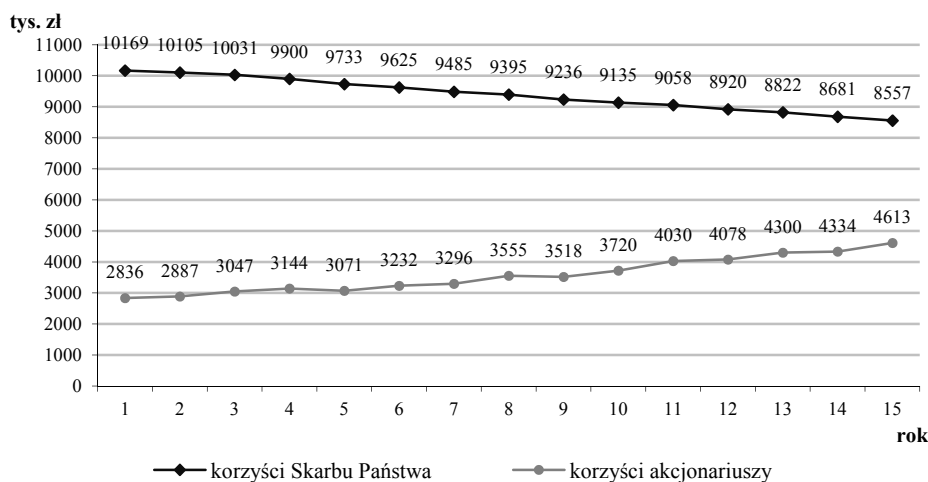
Szersza analiza pozwoliła na próbę ustalenia zależności korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy od wynegocjowanej ceny za przedsiębiorstwo.

Uzyskane wyniki z modelu obliczeniowego zostały przedstawione graficznie na wykresach 1 do 5.

Na podstawie budowanych tabel zauważono występowanie prawidłowości – zmienność korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki w zależności od ceny przedsiębiorstwa, co zobrazowano na wykresie 6.

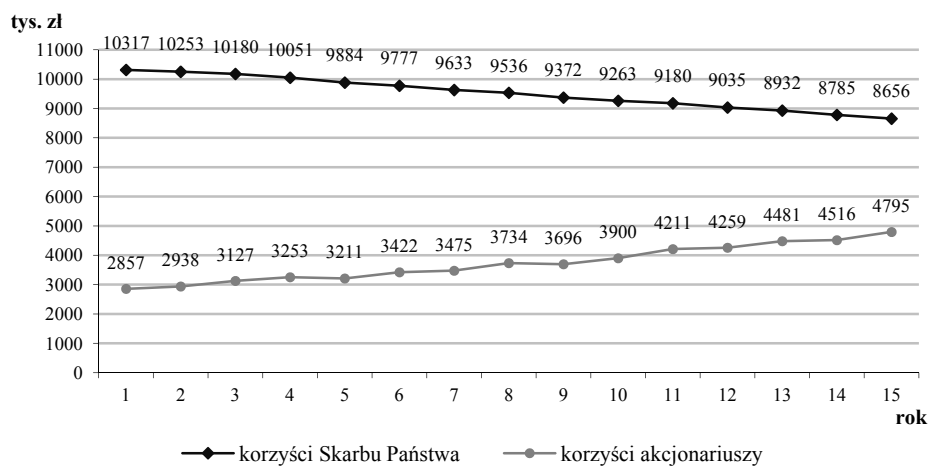
Przy przeprowadzaniu ocen ekonomicznych, przy przyjętych wartościach przedsiębiorstwa w przedziale 30 mln. zł – 35 mln. zł, wyraźnie rysuje się wprost proporcjonalna zależność między ceną a korzyściami obu stron procesu.

Dynamikę średniorocznych wpływów do Skarbu Państwa, średnioroczny przyrost wartości księgowej spółki oraz średnioroczny zwrot kapitału akcyjnego (wypłata dywidendy netto) dla poszczególnych wariantów ceny zestawiono w tabeli 1.

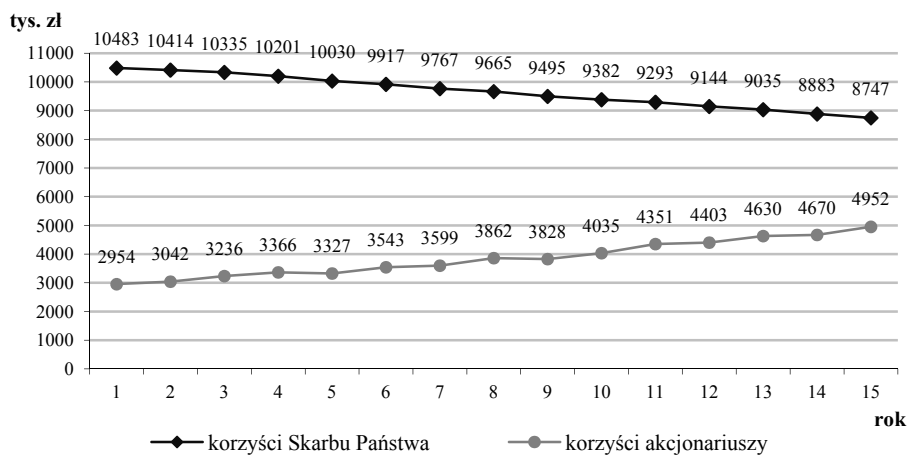


**Wykres 1.** Korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki przy cenie 30 mln. zł

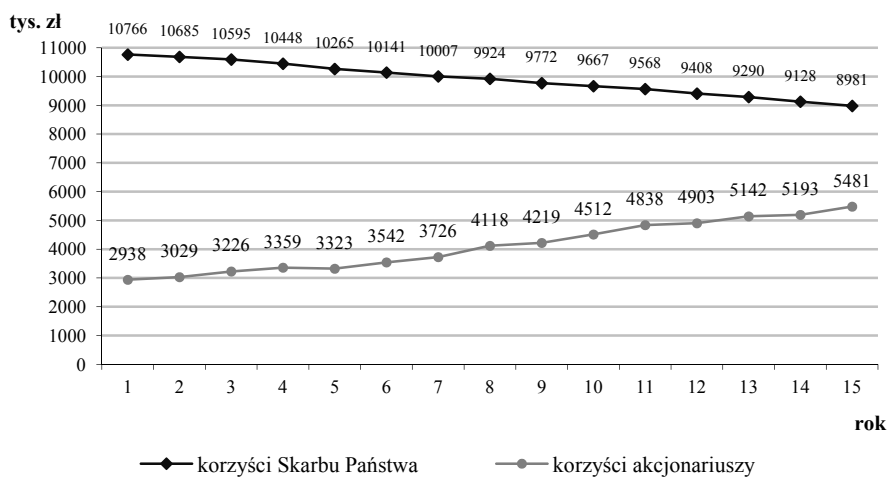
Źródło: opracowanie własne



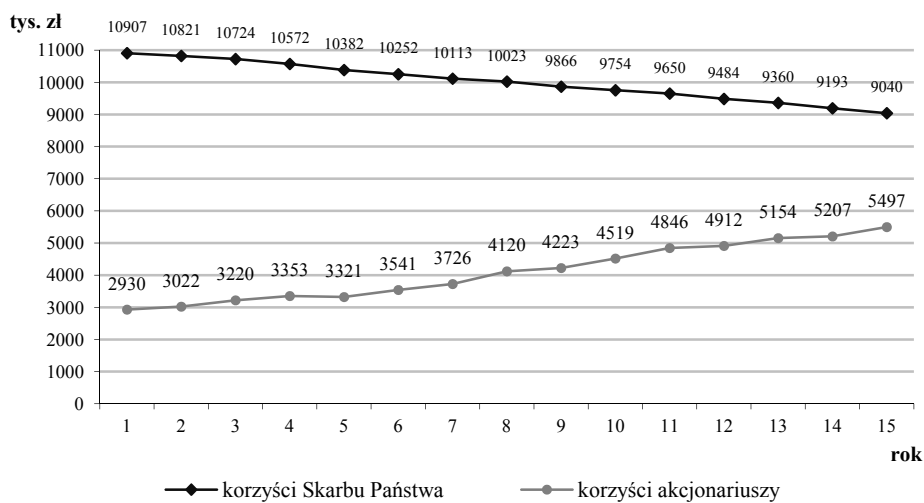
**Wykres 2.** Korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki przy cenie 31 mln. zł  
Źródło: opracowanie własne



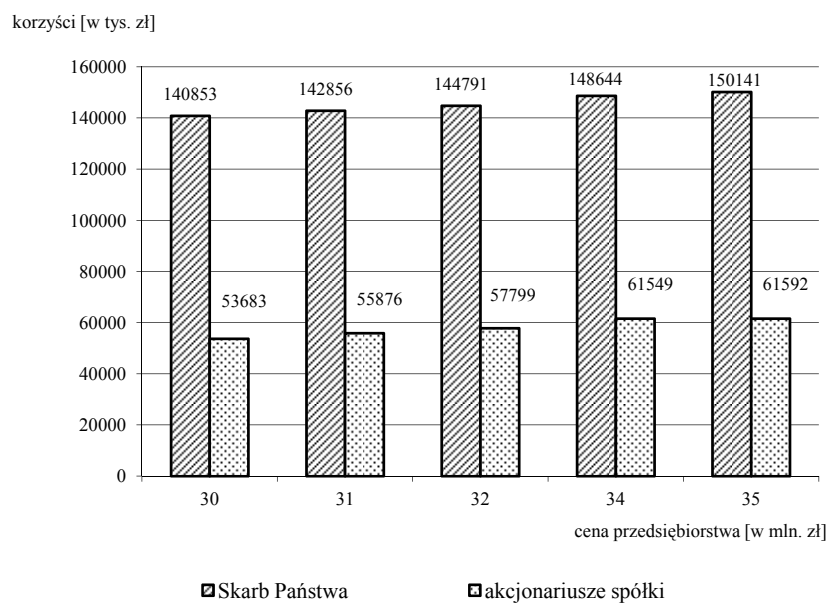
**Wykres 3.** Korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki przy cenie 32 mln. zł  
Źródło: opracowanie własne



Wykres 4. Korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki przy cenie 34 mln. zł  
Źródło: opracowanie własne



Wykres 5. Korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki przy cenie 35 mln. zł  
Źródło: opracowanie własne



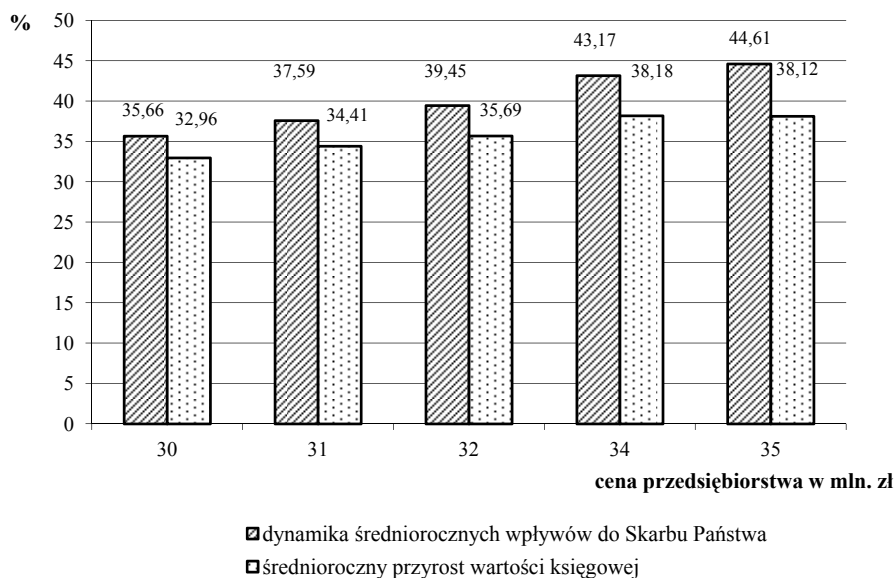
**Wykres 6.** Tendencje zmian korzyści Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki w zależności od ceny przedsiębiorstwa

Źródło: opracowanie własne

**Tabela 1.** Korzyści finansowe Skarbu Państwa i akcjonariuszy spółki w zależności od ceny przedsiębiorstwa

CENA w mln. zł	dynamika średniorocznych wpływów do Skarbu Państwa	średnioroczny przyrost wartości księgowej spółki	średnioroczny zwrot kapitału akcyjnego
30	35,66	32,96	2,15
31	37,59	34,41	2,15
32	39,45	35,69	2,15
34	43,17	38,18	2,15
35	44,61	38,20	2,15

Źródło: opracowanie własne



**Wykres 7.** Dynamika średniorocznych wpływów do Skarbu Państwa i średnioroczny przyrost wartości księgowej spółki w zależności od ceny przedsiębiorstwa

Źródło: opracowanie własne

## 7. Zakończenie

Niewątpliwie prywatyzacja bezpośrednia Przedsiębiorstwa Górniczo-Produkcyjnego „BAZALT” SA w Wilkowie, w trybie art. 39 ust. 1 pkt 3 *Ustawy o komercjalizacji i prywatyzacji*, była odpowiednią formą przekształcenia, korzystną dla obu stron umowy.

Łużyckie Kopalnie Bazaltu „KSIĘGINKI” SA w Lubaniu były przykładem i wzorem dla innych kopalni odkrywkowych. Wskazały drogę prywatyzacji bezpośredniej w trybie art. 39 ust. 1 pkt. 3 wspomnianej ustawy, jako dobrej dla tego typu przedsiębiorstw.

Był to pozytywny przykład, który stanowił mocny argument przy długich i trudnych negocjacjach z Ministerstwem Skarbu Państwa podczas przekształcenia własnościowego PGP „BAZALT” w Wilkowie. Dzięki determinacji zarządcy i załogi zaowocował również sukcesem.

Przeprowadzone rozmowy z pracownikami spółki potwierdzają ich wolę i zrozumienie, poza tym są dumni z pracy w przedsiębiorstwie tak dobrze zarządzanym przez prawdziwego menedżera. Zarząd spółki może liczyć też na ofiarność swojej załogi.

Posiadane certyfikaty Zintegrowanego Systemu Zarządzania Jakością, Środowiskiem i BHP to najlepsza wizytówka PGP „BAZALT” SA w Wilkowie.

Sprawnie działający Zarząd spółki realizuje sukcesywnie wszystkie zalecenia. Wywiązuje się z zobowiązań wobec Skarbu Państwa i regularnie spłaca obciążenia wynikające z umowy leasingowej. Nie ma zagrożenia utraty płynności finansowej spółki.

Tworzenie menedżmentu w Polsce zostało rozpoczęte. Początkowo było utrudnione poprzez brak tradycji i wzorców dobrej władzy.

Doświadczenia ze sprywatyzowanych przedsiębiorstw wskazują, iż w sektorze górnictwa odkrywkowego udało nam się odnieść sukces. Tam menedżment polski stawiał czoła wyzwaniom i potrafił umiejętnie pokierować zmianami ku lepszemu.

## Literatura

- [1] Bednarski L., *Analiza finansowa w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2000, s. 11.
- [2] Bitner E., „Analiza i ocena ekonomiczna prywatyzacji bezpośredniej w Polsce na przykładzie wybranych przedsiębiorstw”, rozprawa doktorska, PCz 2006 r.
- [3] Duraj J., *Analiza ekonomiczna*, PWE, Warszawa 1994, s. 11.
- [4] DzU 2004 nr 269 poz. 2667.
- [5] Gajl N., *Modele zarządzania i finansowania przedsiębiorstw społecznych*, Warszawa 1986, t. 1, s. 238 i n.
- [6] Haus B., Jagoda H., *Kontrakt menedżerski i firma zarządzająca jako nowe formy zarządzania przedsiębiorstwem w polskiej gospodarce*, Wydawnictwo AE, Wrocław 1997.
- [7] <http://katowice.biznespolska.pl/gazeta/article.php?contentid=150623>
- [8] Kosikowski C., *Podstawowe problemy odpowiedzialności gospodarczej*, Folia Iuridica UŁ 1989, nr 34.
- [9] Kosikowski C., *Prawo zarządzania gospodarką narodową*, Łódź 1986, s. 39 i n.
- [10] Kowalik T., *Współczesne systemy ekonomiczne. Powstanie, ewolucja, kryzys*, Wyd. WSzPiZ, Warszawa 2002.
- [11] Kubot Z., *Spółki pracownicze i spółki menedżerskie*, ARR, Zielona Góra 1993, s. 29–30.
- [12] Ludwiniak K., *Pracownik właścicielem*, Paryż 1989, s. 79.
- [13] Moszkowicz M., *Rządzić czy zarządzać – zmiana i ciągłość w sprawowaniu nadzoru właścicielskiego w strukturach organizacyjnych*, [w:] *Nowe kierunki*

- w zarządzaniu przedsiębiorstwem – ciągłość i zmiana, red. H. Jagoda, J. Lichtarski, Wydawnictwo AE, Wrocław. 2000, s. 188.
- [14] *Przekształcenia własnościowe w Polsce (determinanty prawne)*, red. S. Prutis, Białystok 1996.
- [15] Wajda W., *Procesy prywatyzacyjne w krajach postsocjalistycznych*, [w:] *Kierunki przekształceń własnościowych w gospodarce. Aspekt teoretyczno-praktyczny*, Kraków 1991, s. 39 i n.
- [16] Wieczorska B., *Prawne gwarancje samodzielności przedsiębiorstwa państwowego*, Lublin 1990.
- [17] *Wycena nieruchomości i przedsiębiorstw*, t. II, *Metody wyceny przedsiębiorstw i przykłady ich zastosowania*, red. naukowa R. Borowiecki, wyd. II zmienione, TWIGGER, Warszawa 1995, s. 28.
- [18] Wilsz J., *Proces pracy w kontekście samoregulacji i organizacji*, „Pedagogika Pracy” 2009, nr 55.
- [19] Wilsz J., *Aktywność zawodowa człowieka w procesie pracy w kontekście samoregulacji i organizacji*, [w:] *Praca człowieka w XXI wieku. Konteksty – wyzwania – zagrożenia*, red. R. Gerlach, Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2008.
- [20] Wilsz J., *Znaczenie samosterowności człowieka dla efektywnego funkcjonowania zawodowego*, [w:] *Edukacja wobec rynku pracy. Realia – możliwości – perspektywy*, red. R. Gerlach, Wydawnictwo Akademii Bydgoskiej im. Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2003.
- [21] Wilsz J., *Znaczenie samosterowności człowieka w działalności zawodowej*, „Problemy Profesjologii” 2008, nr 1.

## Summary

### Management in Privatized Enterprises in Poland

In the article it was pointed out the need to form management school in Poland. Briefly the history of creating shareholding in Poland and legislation connected with it were quoted. For streamlining running a company in 1991 fixed-term management contracts were enforced. On example of opencast mining sector enterprises an effectiveness and efficiency of managers employed according to this form were demonstrated.

**Key words:** management, fixed-term management contracts, management effectiveness, enterprises of opencast mining sector





Sylwia Akuła

## **Ceny mieszkań we Wrocławiu w latach 2000–2006 według rodzajów sprzedaży i podmiotów oferentów**

### **1. Wstęp**

Opracowanie ma na celu poznanie zmian kształtowania się cen na wrocławskim rynku nieruchomości mieszkaniowych w latach 2000–2006, z uwzględnieniem okresów przed i po akcesji Polski do Unii Europejskiej. Czas, jaki objęto analizą, wynoszący 4,5 roku w okresie przedakcesyjnym i 2,5 roku w okresie poakcesyjnym, jest wystarczającą podstawą do wysunięcia w miarę obiektywnych wniosków co do kształtowania się cen (por. [1]).

Podstawą źródłową artykułu jest dokumentacja Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu, prowadzonej wg kryterium lokalizacyjnego (wg ulic, przekształconego tu w układ dzielnicowy), jak również kryterium wielkości mieszkania (liczba pokoi). Uwzględniono tu wszystkie wyróżnione tryby sprzedaży – przetargowy, bezprzetargowy i wolnorynkowy (por. [2]) oraz podmioty zbywające lokale – gminę Wrocław, Skarb Państwa, osoby prawne i osoby fizyczne.

### **2. Ceny transakcyjne kupna-sprzedaży mieszkań**

Wartość nieruchomości publicznych samorządu terytorialnego i Skarbu Państwa, przeznaczonych do sprzedaży, ustalana jest przez rzeczoznawców majątkowych (por. [26]). Wartość nieruchomości, jako kategoria ekonomiczna, winna stanowić najbardziej prawdopodobną cenę, możliwą do uzyskania na rynku, określoną na podstawie cen transakcyjnych z danego rynku (por. [22]; [8]; [25]). Wycena taka jest podstawą późniejszego określenia ceny nieruchomości w wykazie nieruchomości przeznaczonych do sprzedaży. W praktyce tryb ustalania ceny jest jednak nieco bardziej skomplikowany; w przeważającej mierze obo-

wiązuje przetargowy i bezprzetargowy tryb ustalania ceny, następujący trudności z ustaleniem ceny (por. [8]).

Najbardziej wymierne jest ustalanie cen przy sprzedaży wolnorynkowej; współoddziaływanie popytu i podaży powoduje kształtowanie się cen rynkowych – zarówno zmiany po stronie popytu, jak i podaży zmieniają każdorazowo punkt równowagi. Na rynku nieruchomości równowaga nie utrzymuje się długo, także z powodu oddziaływania innych czynników zewnętrznych, mogących mieć zarówno pozytywny, jak i negatywny wpływ na wartość nieruchomości (por. [25]).

Zbliżający się termin wstąpienia Polski do UE wywołał zwiększenie zainteresowania zakupem mieszkań – wyraźne ożywienie nastąpiło w II poł. 2003 r. (por. [16]). Ożywienie to wiązało się z równoczesnym wzrostem cen i liczbą sprzedawanych mieszkań. Tymczasem podaż mieszkań na rynku pierwotnym nie rosła od co najmniej 2003 r. Po przejściowym zahamowaniu wzrostu liczby transakcji, gwałtowny wzrost popytu na mieszkania nastąpił w 2005 r. (por. [20]) i utrzymał się do końca badanego okresu.

Wrocław od 2000 r. był bardzo dynamicznie rozwijającym się rynkiem nieruchomości mieszkaniowych – tak w efekcie prywatyzacji mienia publicznego, własności Skarbu Państwa i gminy Wrocław (por. [3]), osób prawnych, jak i w efekcie handlu mieszkaniami prywatnymi na rynku wtórnym. Umożliwiało to potencjalnie duży wybór lokali mieszkalnych, w zależności od zasobności i indywidualnych preferencji klientów, wielkości mieszkania i lokalizacji (por. [3]). Ale równocześnie zaznaczyło się zróżnicowanie cenowe ofert, zależne także m.in. od trybu obrotu.

Nasilenie sprzedaży mieszkań uwidoczniło się w okresie bezpośrednio przed przystąpieniem Polski do struktur Unii Europejskiej. Na wrocławskim wtórnym rynku nieruchomości już w 2003 r. dochodziło do ok. 2000 transakcji kupna-sprzedaży mieszkań rocznie. Rynek wtórny był znacznie słabiej rozwinięty od rynku pierwotnego, gdzie dochodziło do sprzedaży ok. 4000 lokali (w 2003 r. – 3902, łącznie z domkami jednorodzinnymi i zabudową szeregową – z tego deweloperzy oddali 2213 mieszkań, a spółdzielnie 524) (por. [9]). Nawet w ujęciu łącznym, jak na miasto o liczbie mieszkańców przekraczającej 630 tys., gdzie wielkość niezaspokojonych potrzeb mieszkaniowych szacuje się na 10% – to bardzo mało.

Pierwsze wyraźniejsze symptomy ogólnego ożywienia gospodarczego w Polsce z początkiem XXI wieku (po kilkuletnim kryzysie gospodarczym), a jeszcze w okresie przedakcesyjnym, zbiegły się w czasie z ożywieniem rynku nieruchomości mieszkaniowych. Wejście Polski do Unii Europejskiej miało przyspieszyć wzrost cen do poziomu krajów starej Unii Europejskiej, tzw. „15” (por. [10]; [12]; [4]). Już na początku 2003 r. wśród analityków rynku nieruchomości

upowszechniły się przewidywania rychłego i gwałtownego wzrostu cen mieszkań (por. [9]).

Jeszcze przed akcesją zapowiedzi analityków zdawały się w pełni realizować (por. [9]). Powód wzrostu cen wydawał się ekspertom oczywisty – na wspólnym rynku jednoczącej się Europy niemożliwe jest przecież utrzymywanie się trwałych dysproporcji cen (por. [18]).

Niewielki tylko spadek cen miał miejsce w 2004 r. (por. [15]), ale – jak się później okazało – nie miał on wpływu na dalszą tendencję kształtowania się cen mieszkań. Natomiast bezpośrednio po akcesji ów gwałtowny wzrost został spowolniony.

Wstąpienie Polski do Unii Europejskiej, w początkowej fazie okresu poakcesyjnego, nie spowodowało wyraźnego, skokowego wzrostu cen nieruchomości (por. [5]). Wzrost cen, jaki nastąpił w 2003 r. i pierwszym kwartale 2004 r., został wręcz wyhamowany po 1 maja 2004 r. (por. [19]; [15]). Późniejsze ożywienie rynku przyniosło, aż do 2006 r., wzrosty na poziomie zaledwie kilkunastu procent w skali rocznej (por. [7]). Równocześnie malała zdolność nabywczą Polaków (por. [23]). Skala wzrostu cen mieszkań była oczywiście bardzo zróżnicowana regionalnie.

Warto jednak zwrócić uwagę również na inne czynniki wzrostu cen (wzrost PKB, inflacja). W okresie przedakcesyjnym do zakupów nieruchomości zachęcało także dość atrakcyjne i spadające oprocentowanie kredytów hipotecznych, przy coraz większej ich dostępności (por. [9]). Na boom mieszkaniowy wpływały także zapowiedzi wzrostu stawek podatku VAT na materiały budowlane (por. [16]).

Na kształtowanie sytuacji na wtórnym rynku mieszkaniowym wpływała mocno sytuacja na rynku pierwotnym, szczególnie słaby rozwój budownictwa – wzrost cen mieszkań to także efekt niskiego poziomu podaży nowych mieszkań, wynikający m.in. z braku polityki mieszkaniowej w okresie transformacji (por. [14]).

Również sami deweloperzy nie byli zainteresowani zwiększaniem podaży nowych mieszkań, bo pozwalało im to, przy tak dużej skali niezaspokojonego popytu, na utrzymywanie zawyżonego poziomu cen (por. [17]). Ceny mieszkań używanych dorównywały cenom nowych mieszkań na rynku pierwotnym.

Firmy deweloperskie, podnosząc ceny, i tak miały pewność, że znajdą chętnych na zakup nowych mieszkań (por. [9]) – w największych polskich miastach było bowiem więcej chętnych niż atrakcyjnie zlokalizowanych lokali mieszkalnych (por. [24]). Nie pozwalała to jednak nawet na prostą reprodukcję i utrzymanie obecnego – i tak bardzo niskiego – poziomu zaspokojenia potrzeb mieszkaniowych (por. [14]). Ów wzrost cen objął najmocniej zwłaszcza duże miasta, gdyż tam mniejsze było bezrobocie – łatwiej o znalezienie pracy i wyższych wynagrodzeń; duże miasta to także prężne ośrodki akademickie, gdzie co roku pojawiają się tysiące studentów, poszukujących mieszkań do wynajęcia. Więk-

sze było też zainteresowanie funduszy inwestycyjnych, inwestujących w nieruchomości, liczących na wysokie zyski.

Wrocławski rynek deweloperski należał, obok Warszawy, Krakowa, Poznania i Trójmiasta, do najdynamiczniej rozwijających się w kraju. Mimo tego, okresowo na wrocławskim rynku nieruchomości mieszkaniowych nie były dostępne żadne nowe mieszkania, co wymuszało zwiększenie zainteresowania rynkiem wtórnym. Wrocław w latach 2005–2006 charakteryzował najszybszy chyba wzrost cen mieszkań wśród wszystkich miast w Polsce (por. [21]). Przez to też ceny mieszkań były nieco tylko niższe niż w Warszawie (por. [21]). Wysokie ceny utrzymywali wobec tego deweloperzy, zapowiadający wprost, iż będą budować mniej i drożej (por. [17]). Wpływ na ceny mieszkań, ich wzrost w ostatnich latach, wywarły bowiem nie tylko podwyżki cen materiałów budowlanych, ale też płace w całym sektorze budownictwa, jak również zwiększone marże deweloperów.

Zwiększenie podaży nowych mieszkań w krótkim okresie było jednak niemożliwe – co wynikało z braku aktualnych planów zagospodarowania przestrzennego, a „bez nich ciężko jest o atrakcyjne grunty pod zabudowę” (por. [17]). Zwiększenie podaży terenów przyczyniłoby się do wzrostu podaży mieszkań co najmniej o połowę. Przy dostępnej ilości działek budowlanych potencjał deweloperów wykorzystywany był zaledwie w ok. 40% (por. [17]).

Znaczny i często gwałtowny wzrost cen na rynku pierwotnym nie mógł nie odbić się na cenach mieszkań nabywanych na rynku wtórnym. Ceny mieszkań na rynku wtórnym podążały za cenami nowych lokali. Podrożały zwłaszcza mieszkania w kamienicach, ale także w blokach z wielkiej płyty. Dla wielu wszakże potencjalnych nabywców ceny mieszkań przekroczyły granice zdrowego rozsądku – stąd coraz większe zainteresowanie zakupami nowych mieszkań w dzielnicach peryferyjnych i poza granicami miasta.

Wzrost cen mieszkań miał jednakże również charakter w dużym stopniu irracjonalny, wynikający z masowych, spekulacyjnych zakupów dokonywanych przez obcokrajowców, zainteresowanych wrocławskim rynkiem nieruchomości mieszkaniowych (por. [20]; [21]). Przeprowadzone przez Polską Agencję Badawczą Budownictwa analizy cen mieszkań wskazywały na wyraźnie spekulacyjny ruch cen mieszkań, nie mający uzasadnienia w krajowych realiach ekonomicznych (por. [6]). Zachodni inwestorzy, jak się szacuje, odkryli w Polsce niemal „kopalnię diamentów”. Wg szacunków ekspertów, co siódme nowe mieszkanie we Wrocławiu nabywane było przez cudzoziemców; również Polacy kupowali mieszkania w celach spekulacyjnych. Wszystkie te czynniki łącznie przyczyniały się do ożywienia rynku – wzrostu cen i do zwiększenia liczby transakcji.

Podobnie jak w całym kraju, we Wrocławiu ceny mieszkań wzrosły bardzo mocno przed przystąpieniem Polski do UE, a następnie wzrost ten został przejściowo powstrzymany. Bardzo silne ponowne nasilenie tego procesu rozpoczęło się w 2005 r., gdy ceny zwiększyły się o ok. 30%; wzrost był tym silniej odczuwalny, że na rynku pojawiało się znacznie mniej ofert niż w latach poprzednich. Ponieważ deweloperzy nie byli w stanie zaspokoić rosnącego popytu, klienci szukali ofert na rynku wtórnym. Zdaniem pośredników, Wrocław jest atrakcyjnym i dynamicznie rozwijającym się miastem, któremu nie grozi stagnacja na rynku nieruchomości.

Nie w całym mieście, oczywiście, zmiany rynku miały ten sam charakter. Kształtowanie się cen na rynku wrocławskim jest zależne od lokalizacji. We Wrocławiu na ceny mieszkań bardzo istotnie wpływało ich położenie – najczęściej nabywano mieszkania w dzielnicach południowych. Wśród wrocławskich osiedli za najlepsze uchodzą Krzyki, Ołtaszyn, Biskupin i Sępolno; wraz z pojawianiem się nowych inwestycji na atrakcyjności zyskały Gaj, Grabiszynek, Muchobór Wielki.

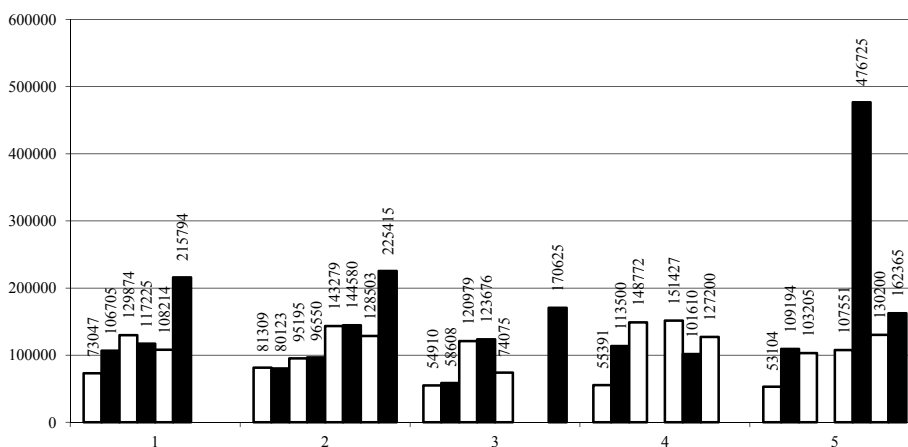
Wielkość mieszkań, choć miała istotny wpływ na liczbę transakcji, nie wpływała aż tak istotnie na ceny lokali mieszkalnych – nie da się stwierdzić wyraźnego wpływu powierzchni mieszkań i liczby pokoi na uzyskiwane ceny za 1 m<sup>2</sup>, choć proporcjonalnie najczęściej kosztowały kawalerki i wraz ze wzrostem powierzchni ceny te nieznacznie malały. Czynnikiem mniej istotnym były także standard mieszkania i jego wykonawstwo (por. [20]).

Dane statystyczne wydają się jednak nie do końca wymierne – ceny mieszkań zaniżały bowiem, wg opinii analityków, transakcje mieszkaniowymi wyjątkowo nieatrakcyjnymi – ze względu na standard i lokalizację. Faktyczne ceny nieruchomości zaniżane były także przez to, że strony kontraktów podawały do aktu notarialnego zaniżoną oficjalną cenę mieszkania (por. [9]). Z drugiej zaś strony na wzrost cen mieszkań, a zwłaszcza na kształtowanie się przeciętnych cen mieszkań w poszczególnych dzielnicach miasta, wpływały bardzo wysokie ceny apartamentów, gdzie na zakup 1 m<sup>2</sup> trzeba było przeznaczyć nawet 20 tys. zł. Tylko jednak oficjalnie rejestrowane w księgach wieczystych i katastrze ceny mogą stać się przedmiotem analizy, niezależnie od trybu sprzedaży, choć niektóre z nich mogą wydawać się mało wymierne.

W dalszej analizie do porównań przyjęto zarówno ceny mieszkań, wg ich wielkości, wyznaczonej liczby pokoi, jak też ceny płacone za 1 m<sup>2</sup>, które to ujęcie wydaje się nieco bardziej wymiernym, zważywszy na niepełną porównywalność wielkości mieszkań (słaba korelacja liczby pokoi i powierzchni mieszkania).

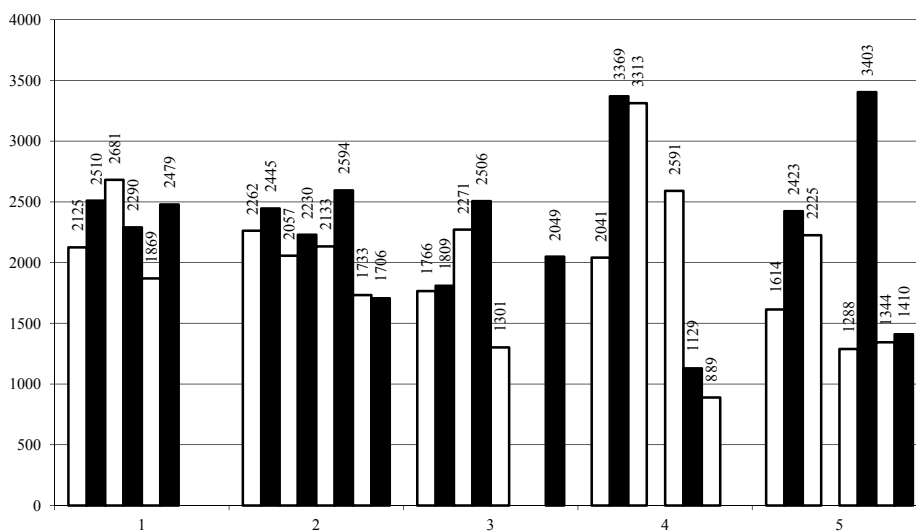
W sprzedaży nieruchomości w **trybie przetargowym** widocznym staje się, zarówno w okresie przedakcesyjnym, jak i poakcesyjnym, brak jakiegokolwiek regularności w kształtowaniu się zarówno cen mieszkań, jak i średnich cen za

1 m<sup>2</sup> powierzchni; ceny te kształtowały się przy braku zależności od wyodrębnionych dzielnic Wrocławia i wielkości mieszkań.



**Rys. 1.** Średnie ceny mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu z podziałem na dzielnice w latach 2000–2006 w trybie przetargowym

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu



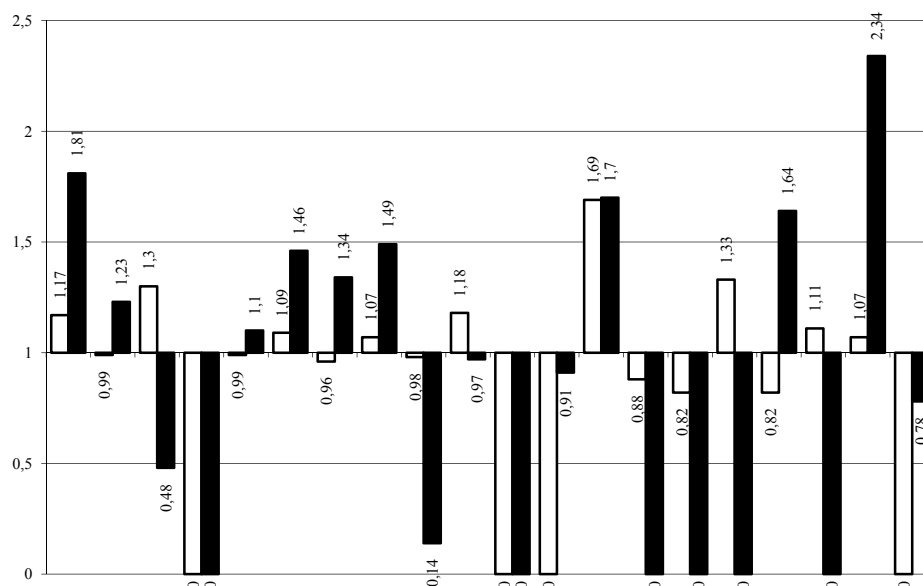
**Rys. 2.** Średnie ceny 1m<sup>2</sup> mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu z podziałem na dzielnice w latach 2000–2006 w trybie przetargowym

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

Wpłynęła na to zapewne niewielka liczba sprzedawanych mieszkań – transakcje miały charakter jednostkowy, a także nieliczna grupa potencjalnych nabywców, zbyt mała dla określenia realnej ceny rynkowej.

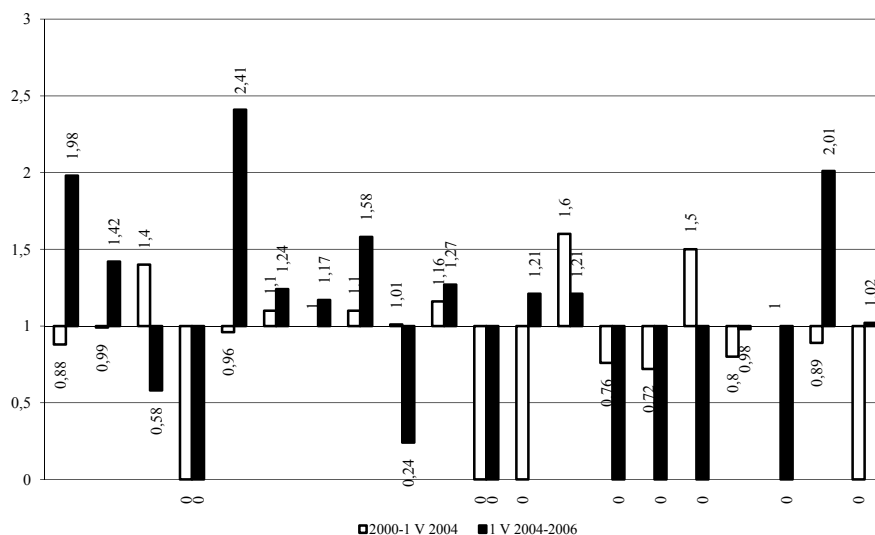
Jedyną kształtującą się dość wyraźnie prawidłowością był znaczny wzrost cen powierzchni mieszkaniowej, choć i od tej reguły zdarzały się istotne wyjątki, a skala zmian była bardzo mocno zróżnicowana. Można na tej podstawie postawić wyraźną tezę, że obserwacje sprzedaży mieszkań w trybie przetargowym, które nie miały charakteru masowego, nie odzwierciedlają w najmniejszym nawet stopniu ewolucyjnego charakteru rynku nieruchomości.

W sprzedaży w trybie **przetargowym** także kształtowanie się dynamiki zmian cen nie odpowiadało ogólnej tendencji rynkowej.



**Rys. 3.** Dynamika zmian cen mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu w latach 2000–2006 w trybie przetargowym

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu



**Rys. 4.** Dynamika zmian cen 1 m<sup>2</sup> mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu w latach 2000–2006 w trybie przetargowym

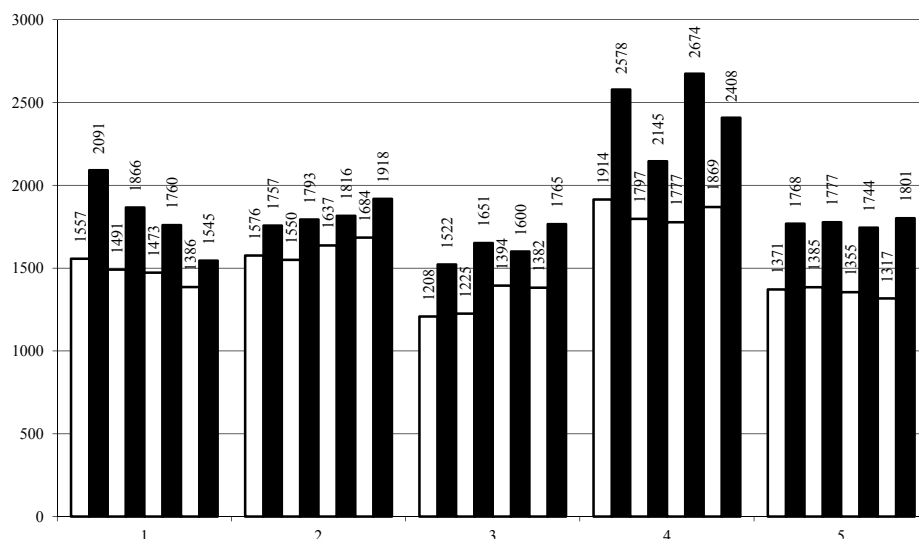
Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

Licznym spadkom cen, tak w okresie przedakcesyjnym, jak i poakcesyjnym, towarzyszyły ich gwałtowne wzrosty – choć tempo zmian cen było w zasadzie wyższe w okresie po akcesji, niż przed akcesją, to nie była to tendencja ogólna. Nie powstała też jakakolwiek zależność pomiędzy średnim tempem zmian cen, a wielkością lokali. Dodatkowo, liczne braki wielu typów transakcji komplikowały obraz rynku.

W sprzedaży w **trybie bezprzetargowym** dużo wyraźniejszą stała się tendencja wzrostowa cen mieszkań, choć nadal podlegały one znacznym wahaniom w poszczególnych latach.

Zważywszy na charakter sprzedaży bezprzetargowej, która miała charakter masowy i częstokroć dominowała na wrocławskim rynku nieruchomości mieszkaniowych, trudno stwierdzić wpływ pojedynczych transakcji na kształtowanie wartości średnich; należy więc przypuszczać, że gwałtowne wahania cen, zwłaszcza w okresie bezpośrednio przedakcesyjnym (lata 2002–2003), odpowiadały ogólniejszym tendencjom kształtującego się rynku nieruchomości, który był niestabilny. Również i w tym trybie sprzedaży wzrost cen mieszkań należałoby przypisać zmianom cen 1 m<sup>2</sup>, a nie zwiększaniu się ich powierzchni.





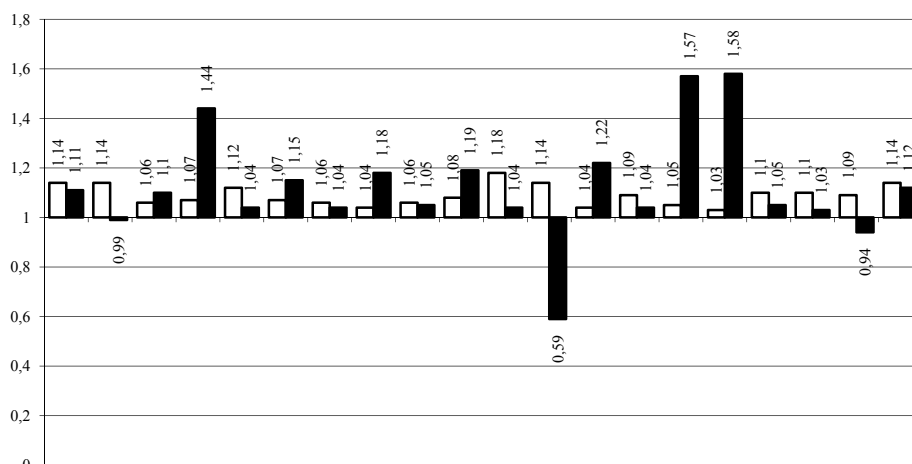
**Rys. 5.** Średnie ceny 1 m<sup>2</sup> mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu z podziałem na dzielnice w latach 2000–2006 w trybie bezprzetargowym

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

Niewidoczne są także – zarówno w okresie przedakcesyjnym, jak i poakcesyjnym – zróżnicowane preferencje co do poszczególnych dzielnic miasta; jedynie Stare Miasto dominowało nad pozostałymi dzielnicami pod względem poziomu cen. Najniższe ceny występowały w różnych dzielnicach, w zależności od wielkości lokali.

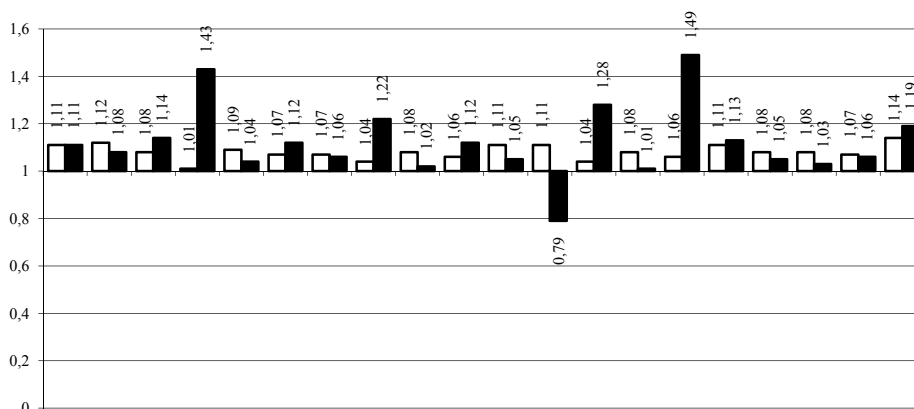
W okresie poakcesyjnym trudno dla poszczególnych dzielnic zauważyć wyraźne przyspieszenie tempa wzrostu cen; była to raczej kontynuacja tendencji zapoczątkowanej w okresie przedakcesyjnym.

W sprzedaży w trybie **bezprzetargowym** wyraźnie już zauważalny stał się proces wzrostu cen nieruchomości, przy czym przeciętne tempo zmian cen w okresie przed akcesją i po akcesji nie różniło się znacznie i nie przekraczało kilkunastu procent w skali roku.



**Rys. 6.** Dynamika zmian cen mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu w latach 2000–2006 w trybie bezprzetargowym

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu



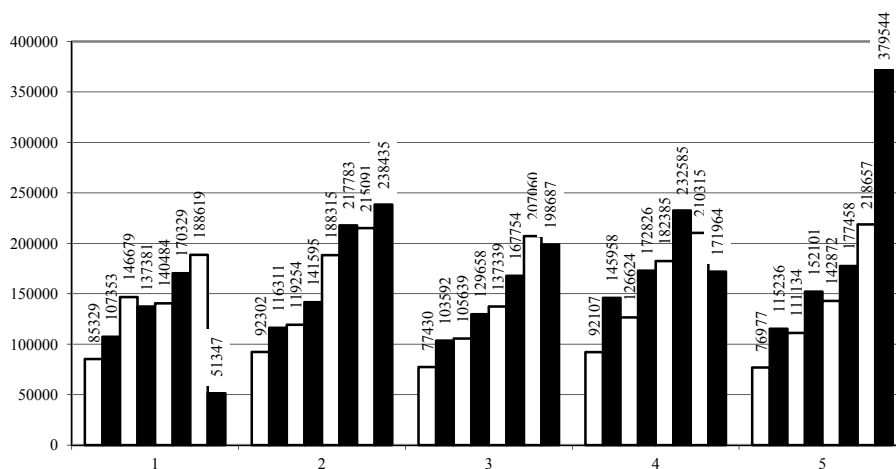
**Rys. 7.** Dynamika zmian cen 1 m<sup>2</sup> mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu w latach 2000–2006 w trybie bezprzetargowym

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

Nie powstały też istotne różnice w zależności ani od wielkości mieszkań, ani ich lokalizacji. Większe wzrosty w okresie poakcesyjnym – mieszkań 4 i więcej pokojowych w dzielnicy Fabryczna, czy 3-pokojowych w dzielnicy Stare Mia-

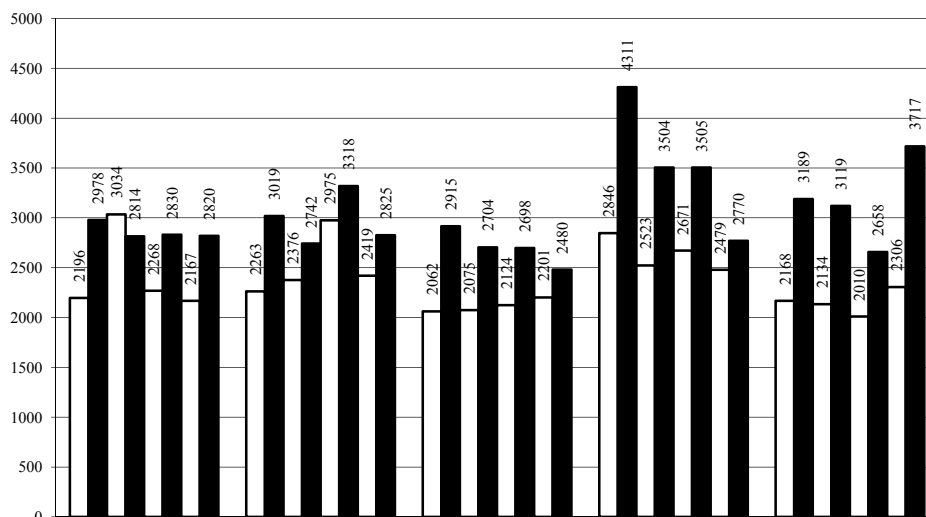
sto, przekraczające 40%, miały charakter wyjątkowy, podobnie jak średnioroczny spadek cen o ponad 20% mieszkań największych w dzielnicy Psie Pole.

Sprzedaż w **trybie wolnorynkowym**, pozbawiona licznych ograniczeń prawnych, charakterystycznych dla obu poprzednich trybów obrotu nieruchomości, najlepiej odpowiadała tendencjom kształtowanym na rynku przez siły popytu i podaży.



**Rys. 8.** Średnie ceny mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu z podziałem na dzielnice w latach 2000–2006 na wolnym rynku

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

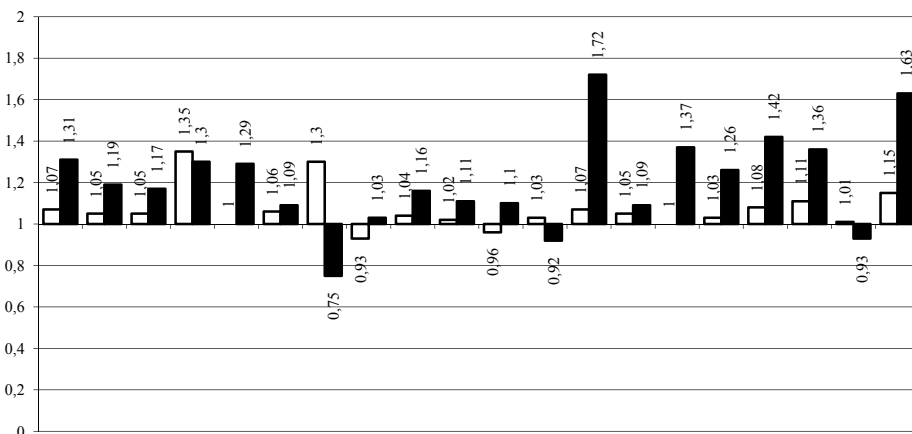


**Rys. 9.** Średnie ceny 1 m<sup>2</sup> mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu z podziałem na dzielnice w latach 2000–2006 na wolnym rynku

Źródło opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

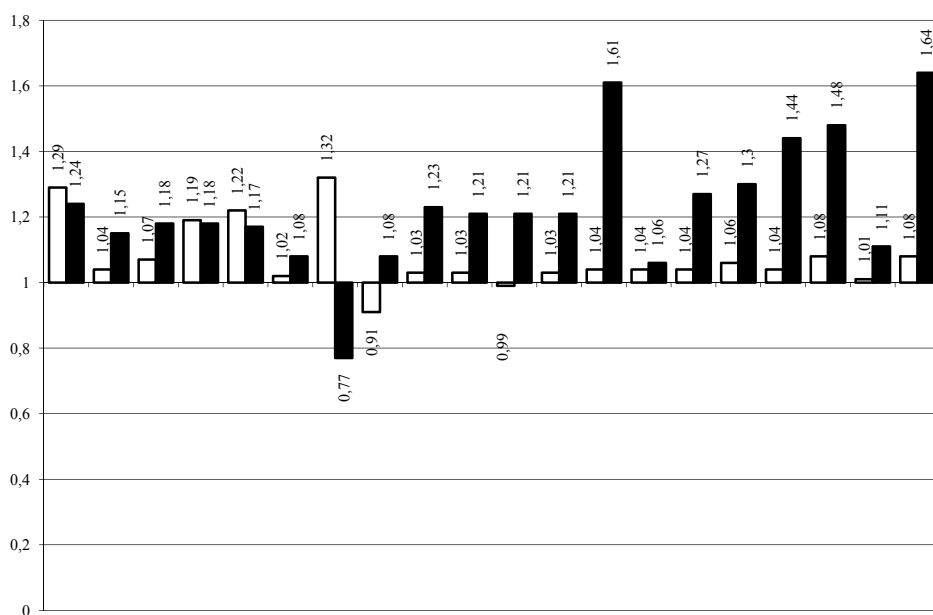
W obrocie wolnorynkowym najwyraźniej widoczne są wszelkie prawidłowości zmiany cen, wynikające z oczekiwań i preferencji nabywców. Okres przedakcesyjny okazał się czasem niestabilnego wzrostu cen mieszkań; w poszczególnych dzielnicach zaobserwować można bowiem gwałtowne wzrosty cen w latach 2001–2002, ale nie miały one charakteru powszechnego i wynikały prawdopodobnie z różnicujących się preferencji nabywców co do lokalizacji, a być może – także stanu utrzymania mieszkań. W okresie bezpośrednio poakcesyjnym tempo wzrostu cen mieszkań nie uległo gwałtownemu wzrostowi – dopiero w roku 2006 podrożały one znacząco. W sprzedaży w trybie wolnorynkowym najwyższe ceny mieszkań osiągnęto na terenie Starego Miasta, natomiast najniższe w zasadzie na Psim Polu.

Również większą zmienność rynku zaobserwować można w sprzedaży w trybie **wolnorynkowym**.



**Rys. 10.** Dynamika zmian cen mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu w latach 2000–2006 na wolnym rynku

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu



**Rys. 11.** Dynamika zmian cen 1 m<sup>2</sup> mieszkań sprzedawanych we Wrocławiu w latach 2000–2006 na wolnym rynku

Źródło: opracowanie własne na podstawie dokumentacji Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu

Zaobserwować można istotne różnice pomiędzy dzielnicami miasta: w trzech z nich, tj. Psim Polu, Starym Mieście i Śródmieściu tempo zmian cen w okresie po akcesji było znacznie szybsze niż przed akcesją, przy czym w dzielnicy Psie Pole skala zmian była najmniej zróżnicowana w zależności od wielkości mieszkania, na Starym Mieście najbardziej podrożały lokale najmniejsze, a w Śródmieściu największe. Na terenie dzielnic Fabryczna i Krzyki zmiany były bardziej zróżnicowane i – zależnie od wielkości mieszkania – ceny w okresie po akcesji rosły często wolniej niż przed akcesją, a w pojedynczych wypadkach, w dzielnicy Krzyki, nawet spadały.

Powyższa analiza wskazuje, że to nie tylko przystąpienie Polski do Unii Europejskiej było podstawową przyczyną wzrostu cen i hossy na rynku mieszkaniowym Wrocławia. Zmiany co do preferencji nabywców mieszkań, zarówno ze względu na wielkość, jak i lokalizację, zaznaczyły się jeszcze w okresie poprzedzającym akcesję. Wzrosty cen, zarówno mieszkań, jak i 1 m<sup>2</sup>, były zaś efektem wieloprzyczynowego procesu (braku planów zagospodarowania przestrzennego, niskiej podaży budownictwa wielorodzinnego – spółdzielczego i developerskiego, zmian zasad i stawek opodatkowania, wzrostu płac, spadku oprocentowania kredytów mieszkaniowych), o dłuższym horyzoncie czasowym. Niemniej Polska, w tym i miasto Wrocław, podążyla tu z pewnością drogą innych krajów UE, które – od czasu, gdy stały się jej członkami – obserwowały wieloletni, ciągły wzrost cen nieruchomości (np. w Hiszpanii trwa on nieprzerwanie od ponad 20 lat).

W perspektywie kilkunastoletniej należy oczekiwać zapewne dalszego procesu wzrostu cen (por. [10]; [18]). Trudno też liczyć na radykalną obniżkę cen w najbliższym czasie, choć wpływać na to będzie w dużej mierze dalsze kształtowanie się sytuacji gospodarczej naszego kraju.

## Literatura

- [1] Akuła S., *Ceny mieszkań we Wrocławiu na podstawie ofert sprzedaży (2002–2006)*, [w:] *Obrót nieruchomościami na ziemiach polskich od XII do XXI wieku*, red. F. Kusiak, Wrocław 2007.
- [2] Akuła S., *Sprzedaż lokali mieszkalnych we Wrocławiu w latach 2000–2006 według rodzajów sprzedaży i podmiotów oferentów*, „Śląski Kwartalnik Historyczny Sobótka” 2008, nr 3.
- [3] Akuła S., *Sprzedaż mieszkań we Wrocławiu w latach 2003–2005*, [w:] *Społeczeństwo i gospodarka w badaniach historycznych – dokonania i perspektywy*, red. E. Kościk i T. Głowiński, Wrocław 2006.
- [4] Andrusyszyn-Wojtasik A., *Co nas czeka*, „Rynek Dolnośląski” czerwiec 2005.

- 
- [5] Battek M., *Wtórny rynek nieruchomości w Polsce*, strona internetowa Wrocławskiej Giełdy Nieruchomości, [www.wgn.pl](http://www.wgn.pl).
- [6] Błaszczak G., *U nas – Wyspiarze, u sąsiadów – Rosjanie*, „Rzeczpospolita” 07.08.2006.
- [7] Błaszczak G., *Używane i nowe kosztują tyle samo*, „Rzeczpospolita” 31.07.2006.
- [8] Gniewek E., *Obrót nieruchomościami państwowymi i komunalnymi*, Kraków 1994.
- [9] Juszcak M., *Podrożalo. Mieszkania na wrocławskim rynku wtórnym w 2003 r.*, „Rynek Dolnośląski” kwiecień 2004.
- [10] Kossowski M., *Fundusze nieruchomości mają przyszłość*, strona internetowa firmy doradczej EXPANDER, [www.expander.pl](http://www.expander.pl).
- [11] Mączyński P., Baj L., *Dlaczego droższą używane mieszkania*, „Gazeta Wyborcza” 29.05.2006.
- [12] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Ceny mieszkań nie wzrosną*, „Gazeta Prawna” 27.02.2004.
- [13] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Chcą zarabiać na wzroście cen mieszkań*, „Gazeta Wyborcza” 07.10.2004.
- [14] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Coraz mniej mieszkań*, „Gazeta Prawna” 28.09.2004.
- [15] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Mieszkania tańsze*, „Gazeta Wyborcza” 16.11.2004.
- [16] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Najniższe ceny mieszkań*, „Gazeta Prawna” 28.04.2004.
- [17] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Nie muszą budować taniej*, „Rzeczpospolita” 04.10.2004.
- [18] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *W budownictwie trochę lepiej*, „Gazeta Prawna” 17.08.2004.
- [19] Ministerstwo Transportu i Budownictwa, *Taniej nie będzie*, „Gazeta Wyborcza” 27.09.2004.
- [20] Miskiewicz M., *Wrocławski rynek mieszkaniowy*, strona internetowa „Gazety Wyborczej”, [www.miasta.gazeta.pl](http://www.miasta.gazeta.pl)
- [21] Nowaczyk M., *20 tys. za metr kwadratowy we wrocławskim apartamentowcu*, strona internetowa Gazety Wyborczej, [www.dom.gazeta.pl](http://www.dom.gazeta.pl)
- [22] Padrak R., *Sprzedaż nieruchomości na podstawie ustawy o gospodarce nieruchomościami*, Warszawa 2005.
- [23] Wielgo M., *Ceny mieszkań mogłyby spaść. Teoretycznie*, „Gazeta Wyborcza” 24.07.2006.
- [24] Wiktorowska B., *W dużych miastach szybko rosną ceny mieszkań*, „Gazeta Prawna” 29.05.2006.

[25] Źróbek S., Źróbek R., Kuryj J., *Gospodarka nieruchomościami z komentarzem do wybranych procedur*, Katowice 2006.

**Akty prawne:**

[26] Ustawa z 21 sierpnia 1997 r. o gospodarce nieruchomościami.

**Materiały źródłowe:**

Dokumentacja Zarządu Geodezji, Kartografii i Katastru Miejskiego we Wrocławiu.

## **Summary**

### **Prices of Apartments in Wrocław in the Years 2000–2006 Sales by Type of Companies and Entities**

In the period of years 2000–2006, what is just before and after Poland's accession to the EU Wrocław residential real estate market has been growing and experiencing clear liveliness. Both the privatizations of public premises (belonging to the Treasury, Wrocław borough, legal persons) as well as private market transactions have been gaining the growth of the turnover and growth of the flats prices. In the rush demand for dwellings on one hand and low new homes supply on the housing cooperative's and developer's market on the other hand, the continuation of this process shall be expected. In addition the level of prices in Wrocław will reach the level of other European metropolis soon.



Agnieszka Widawska-Stanisł  
Izabella Sowier-Kasprzyk

## **Promocja gminy jako element marketingu terytorialnego**

### **1. Wprowadzenie**

Działalność marketingowa kojarzyła się do niedawna z możliwością stosowania jedynie w przypadku przedsiębiorstw oferujących produkty materialne (np. odzież, obuwie, żywność) i usługi (np. ubezpieczenia, usługi turystyczne czy edukacyjne). Zmiany w tej kwestii nastąpiły zaledwie w latach 90. ubiegłego stulecia. Zaczęto dostrzegać możliwości płynące z zastosowań marketingu, jego strategii i narzędzi w innych obszarach życia społeczno-gospodarczego. Takim obszarem, w którym marketing znalazł zastosowanie, jest jednostka terytorialna (np. miasto, gmina).

Celem artykułu było przedstawienie zagadnień związanych z promocją gminy oraz wskazanie na wagę stosowania narzędzia oddziaływania marketingowego. Przy czym należy pamiętać, że niska efektywność działań samorządu, i w konsekwencji wzrost bezrobocia i migracja mieszkańców do atrakcyjniejszych miejsc zamieszkania, coraz częściej spotyka się z dezaprobatą społeczności lokalnej.

### **2. Podstawowe definicje**

Gmina to system społeczno-gospodarczy, na który składają się takie elementy jak obszar, mieszkańcy, organy gminy, jednostki organizacyjne. Marketing towarzyszy wszelkim działaniom organizacji służącym zaprezentowaniu oferty, wycenieniu jej, właściwej dystrybucji a także poinformowaniu potencjalnych nabywców o jej istnieniu – czyli właściwej promocji. Należy tutaj pamiętać, że ze względu na usługowy charakter marketingu, oferta gminy nosi cechy niematerialności, nierówności, nierozdzielności i nietrwałości. Dlatego tym bar-

dziej w działaniach marketingowych, czy wreszcie promocyjnych, należy zaakcentować atrakcyjność oferty.

W literaturze coraz częściej pojawiają się informacje na temat zastosowań działań marketingowych w działalności jednostki samorządu lokalnego. Według J. Klisińskiego i Z. Widery marketing terytorialny utożsamiany jest z marketingiem miasta lub gminy, inaczej – z marketingiem przestrzeni. „Marketing samorządu terytorialnego lokalnie utożsamiany jest z marketingiem gminy tak miejskiej jak i wiejskiej. Przywołuje się przy tej okazji lokalizm – światopogląd przypisujący większą wagę „małym ojczyznom” to jest gminom. Za podstawowe wartości lokalizmu uznaje się demokrację, subsydiarność (pomocniczość), samorządność i decentralizację. Zgodnie z zasadą subsydiarności nie należy nigdy powierzać większej jednostce zadań, które mogą być wykonane przez jednostki mniejsze. Dlatego gminie – najmniejszej jednostce podziału terytorialnego – stworzono domniemanie kompetencji w zakresie zadań samorządu terytorialnego” (por. [4, s. 9]).

Kolejna definicja mówi, że „marketing terytorialny (marketing geograficzny) – jest narzędziem w zarządzaniu rozwojem jednostki terytorialnej (np. miastem) w taki sposób, aby swego rodzaju złożony zestaw megaproduktów, jakim jest miasto, zaspokoił zidentyfikowane i antycypowane potrzeby klientów w zamian za uzyskane korzyści dla określonego terytorium. Marketing geograficzny uwzględnia każdą skalę przestrzenną analizowanego terytorium oraz wskazuje na szczególnie złożony charakter relacji społecznych, ekonomicznych i przyrodniczych zachodzących w środowisku życia człowieka” [3, s. 9].

Pojęcie promocji definiuje się jako „zespół środków, za pomocą których usługodawca komunikuje się z rynkiem, a mówiąc dokładnie – przekazuje informacje o swojej działalności lub o konkretnych produktach czy usługach” (por. [6, s. 199]) „Promocja mix to kompozycja czterech instrumentów: reklamy, sprzedaży osobistej, promocji sprzedaży i public relations stosowanych przez firmę, aby osiągnąć cele marketingowe” (por. [5, s. 824]). W literaturze przedmiotu przedstawia się również marketing bezpośredni w celu promowania organizacji oraz nieformalny przekaz ustny, którego siły nie można nie doceniać.

### **3. Zastosowanie działań marketingowych w działalności jednostek samorządu terytorialnego**

Jednostki samorządu terytorialnego, jako podmioty dostarczające różnego rodzaju usługi, musiały w ostatnich latach zacząć zwracać uwagę na takie elementy swojej działalności, jak: oferta, jakość tej oferty, profesjonalna obsługa klienta, efektywność, budowa pozytywnego wizerunku w otoczeniu. Na zmiany

zachodzące w działalności jednostek samorządu terytorialnego, a tym samym na wzrost znaczenia roli odbiorcy usług publicznych, wpływ ma wiele czynników. Wzrost znaczenia klienta-odbiorcy usług „[...] jest konsekwencją obowiązującego modelu systemu zasileń dla jednostek samorządu terytorialnego, a w ujęciu generalnym, przesądzają o nim takie rozwiązania systemowe jak:

- bezpośredni związek pomiędzy poziomem dochodów własnych jednostek samorządu terytorialnego, a liczbą osób uzyskujących dochody podlegające opodatkowaniu podatkiem od osób fizycznych oraz liczbą podmiotów gospodarczych funkcjonujących na terenie danej jednostki (dochody własne JST w postaci udziałów w podatkach PIT i CIT),
- możliwość migracji mieszkańców; zjawisko „głosowania nogami” (dotyczy zwłaszcza terenów zapóźnionych gospodarczo),
- skutki procesów globalizacyjnych i integracyjnych w postaci m.in. swobodnego przepływu kapitału oraz jego akumulacji na terenach atrakcyjnych inwestycyjnie” (por. [7, s. 547]).

Zarządzanie przestrzenią miasta z zastosowaniem koncepcji marketingu geograficznego musi prowadzić do osiągnięcia następujących celów:

- poprawy warunków życia mieszkańców,
- rozwoju społeczno-gospodarczego,
- ładu w organizacji przestrzeni miejskiej (por. [3, s.9]).

Podobne cele mogą przyświecać każdej innej jednostce samorządu terytorialnego, dlatego dobór odpowiedniej kompozycji instrumentów komunikacji marketingowej pozwala cele te realizować.

#### **4. Komunikacja marketingowa w działalności samorządu terytorialnego**

W ujęciu marketingowym, za komunikację przedsiębiorstwa z otoczeniem przyjęło się uznawać wszystkie instrumenty promocji.

Promocja jest główną formą pozyskiwania klientów przez organizację, a dobrze przeprowadzone działania promocyjne pozwalają na osiągnięcie sukcesu rynkowego.

Podmioty działające na rynku dążą do maksymalizacji zysku i obrotów, do osiągnięcia wysokiego udziału w rynku oraz do minimalizacji kosztów. Cele psychograficzne polegają na rozpoznawaniu marki firmy na tle marek konkurencji. Im większa jest znajomość marki produktu oraz firmy, tym większa szansa na osiągnięcie oczekiwanych efektów finansowych. Podobne zadania stawiają sobie jednostki samorządu terytorialnego, precyzując składniki oferty, segmenty

rynku, które chcą obsługiwać, oraz dobierając narzędzia komunikowania o swoich poczynaniach względem potencjalnych odbiorców.

Przykładowe cele rozwoju gminy można zestawić w sposób następujący:

- „zapewnienie trwałego rozwoju gospodarczego i miejsc pracy;
- rozwój lokalnej przedsiębiorczości: tworzenie warunków rozwoju drobnego przetwórstwa, handlu i usług, tworzenie warunków rozwoju hodowli ryb i nieuciążliwego przemysłu;
- rozwój usług rekreacyjnych i turystycznych: organizacja terenów rekreacji i turystyki, rozbudowa istniejącej bazy gastronomicznej i noclegowej, standaryzacja usług pensjonatowych i wprowadzenie usług sanatoryjnych i rehabilitacyjnych;
- uporządkowanie gospodarki przestrzennej: segregacja funkcjonalna terenu gminy, uporządkowanie katastru własności, stworzenie systemu preferencji dla form budownictwa rezydencjalnego;
- rozwój inwestycji: promocja gminy, uruchomienie terenów pod budownictwo i rozwój przedsiębiorczości;
- utrzymanie produkcji rolnej: stworzenie warunków rozwoju rolnictwa towarowego, organizacja poradnictwa dotyczącego upraw, zagospodarowanie nieużytków pod uprawę krzewów i drzewek;
- zwiększenie szans osobistego rozwoju mieszkańców;
- poprawa i wyrównanie warunków życia;
- eliminacja zagrożeń środowiskowych, ochrona i kształtowanie istniejących wartości przyrodniczych oraz racjonalna gospodarka poszczególnymi komponentami;
- wyrównanie szans edukacyjnych dzieci niepełnosprawnych, (por. [1, s. 29]).

Wśród grup docelowych, które znajdują się w centrum zainteresowania jednostek samorządu terytorialnego, wyróżnia się nie tylko lokalną społeczność czy podmioty gospodarcze funkcjonujące na terenie jednostki. Należą do nich również podmioty gospodarcze, które są zainteresowane rozpoczęciem działalności na danym terenie, organizacje turystyczne, przedsiębiorstwa turystyczne, instytucje lokalne, finansowe, organizatorzy różnych imprez kulturalnych, edukacyjnych, a także turyści.

Główne funkcje promocji to:

- funkcja informacyjna – jest to pierwotna funkcja promocji, polega ona częściowo na edukowaniu konsumentów, np. podczas informowania o nowych produktach, możliwościach zastosowania produktu, czy wprowadzania nowego produktu na rynek;
- funkcja perswazyjna – możemy o niej mówić, gdy występuje proces zachęcania, aktywizowania odbiorców do działań mających na celu nabycie pro-

duktów firmy. Funkcja ta ma na celu zdobycie klienta bądź pozyskanie jego lojalności;

- funkcja konkurencyjna – wyraża się w rywalizacji przedsiębiorstw na rynku. Obecnie działania promocyjne są często decydującym elementem walki konkurencyjnej przedsiębiorstw. Należy bowiem pamiętać, że w wyniku wyczerpywania się skuteczności pozostałych elementów marketingu to właśnie promocja pozwala informować i przekonywać nabywców oraz wyróżniać się spośród oferty konkurencyjnej (por. [2, s. 54–55]).

Wszystkie instrumenty promocji, w tym reklama, sprzedaż osobista, promocja sprzedaży, *public relations* oraz marketing bezpośredni muszą być starannie dobrane i połączone. Firmy szukają różnych sposobów udoskonalania promocji, zastępując jeden instrument promocji innym, bardziej efektywnym, by w pełni osiągnąć zamierzone cele [5].

Adresatami działań promocyjnych (w tym działań służących kreowaniu pozytywnego wizerunku) samorządu terytorialnego są mieszkańcy, turyści i potencjalni inwestorzy. Każdy z wymienionych segmentów ma określone potrzeby i oczekiwania wobec władz lokalnych i regionalnych.

Warto zastanowić się, jakie cechy powinien posiadać odpowiednio dobrany zestaw instrumentów promocji gminy. Narzędzia te powinny mieć charakter zamierzony, przemyślany i uporządkowany. Powinny pojawić się w odpowiedzi na wcześniej założone cele, czyli powinny odnieść zamierzony skutek – dać oczekiwany efekt. Ponadto promocja gminy powinna odpowiadać potrzebom konkretnego segmentu, powinna być interesująca, przyciągająca uwagę zainteresowanych odbiorców (tych, do których jest skierowana – społeczności lokalnej, turystów, inwestorów), zawierać kompletną informację, a także wskazywać na zalety promowanego produktu. Dlatego działania promocyjne na poziomie samorządu terytorialnego mogą dotyczyć:

- walorów naturalno-przyrodniczych (klimat, pomniki przyrody, parki krajo-brazowe, atrakcje turystyczne);
- istniejącej i przyszłej infrastruktury (dostępność komunikacyjna – drogi, porty, lotniska, węzły komunikacyjne, mosty, itp.);
- infrastruktury społecznej i ludzkiej;
- instytucji finansowych;
- warunków prorozwojowych, proinwestycyjnych (por. [7, s. 549]).

Do najczęściej proponowanych narzędzi komunikowania się gminy z otoczeniem należą:

- *public relations* (w tym *publicity*, *media relations*, *investor relations*) – ma na celu podkreślanie tradycji regionu, polityki wobec inwestorów, podtrzy-

- mywanie kontaktów z partnerami, dbałość o kreowanie i utrwalanie pozytywnego obrazu gminy, społecznego zaufania i zrozumienia;
- sprzedaż osobista – traktowana jako osobista forma kontaktu z nabywcą – przykładem takich działań mogą być Drzwi Otwarte w Gminie;
  - reklama jako najbardziej popularne narzędzie promocji – w działalności gminy są to ogłoszenia w prasie codziennej, lokalnej, regionalnej czy branżowej, a także spoty reklamowe w telewizji lokalnej czy regionalnej, prezentacje oraz filmy reklamowe itp.;
  - promocja sprzedaży, czyli wszelkie materialne środki stosowane w celu zwiększenia atrakcyjności gminy, np. uczestnictwo w targach, imprezach branży turystycznej itp.;
  - marketing bezpośredni – umożliwia bezpośredni kontakt i prezentację walorów oferty za pośrednictwem takich mediów jak telefon, faks, poczta tradycyjna i elektroniczna; nowoczesne narzędzia marketingu bezpośredniego, takie jak Internet, umożliwiają komunikację interaktywną, a posiadanie przez gminę witryny internetowej podnosi jej atrakcyjność.

## 5. Podsumowanie

Odpowiedni dobór narzędzi promocji uzależniony jest od oferty, jaką dysponuje gmina, od segmentów rynku, które obsługuje, oraz od właściwego wykorzystania systemów obserwacji otoczenia. Dzięki szybko rozwijającej się technologii przetwarzania i interpretacji danych, działania promocyjne mogą kształtować pewne postawy i kreować zachowania zgodnie z kierunkiem zmian w otoczeniu społeczno-ekonomicznym jednostki.

## Literatura

- [1] Beblo W., Wojtacha-Gonsior A., *Strategia Rozwoju Zrównoważonego Gminy Poraj*, Citec, Katowice 2000.
- [2] Drzazga M., *Systemy promocji przedsiębiorstw*, PWE, Warszawa 2006.
- [3] Karczmarek J., Włodarczyk B., *Strategia rozwoju produktów turystycznych dużego miasta przemysłowego – przykład Łodzi*, „Problemy Turystyki”, vol. XXIX, Instytut Turystyki, Warszawa 2006.
- [4] Klisiński J., Widera Z., *Marketing samorządu terytorialnego. Aspekty lokalne*, Wyd. Unikat 2, Katowice 2006.
- [5] Kotler P., *Podręcznik europejski*, PWE, Warszawa 2002.

- 
- [6] Strzembiski L., *Marketing usług turystycznych*, [w:] *Turystyka rekreacyjna oraz turystyka specjalistyczna*, red. T. Burzyski, M. Łabaj, Wyd. DEKA, Warszawa 2003.
- [7] Ziolo M., *Promocja jako zadanie własne jednostek samorządu terytorialnego*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego”, nr 5, Szczecin 2006.

## Summary

### **Commune Promotion as a Part of Territorial Marketing**

When superior goals of a commune is discussed it is necessary to be aware that it should be aimed on commonwealth of its citizens. Thanks to an appropriate marketing mix composition it is possible not only to assure a positive commune image but also to attract prosper investors, tourists and other subjects interested in a commune offer. Integrated promotion actions allow to accomplish presupposed goals.





Roman Garbiec

## **Emerytury górnicze w polskim systemie emerytalnym**

### **Wstęp**

Zadaniem każdego państwa jest zapewnienie obywatelom pomocy w sytuacjach, kiedy nie mogą oni sami sobie jej zapewnić. Do takich sytuacji zaliczamy starość, kiedy to osoby nią dotknięte muszą mieć – albo poprzez własną zapobiegliwość, albo przez pomoc państwa – wystarczające środki utrzymania. Państwo poprzez system świadczeń społecznych zabezpiecza osobom starszym niezbędne środki finansowe do przeżycia. Do standardowych rozwiązań z tego zakresu zaliczamy system świadczeń emerytalnych. Standardy światowe przewidują różnorodne rozwiązania z tego zakresu, uzależnione przede wszystkim od sposobu przyznawania świadczeń i metod obliczania wysokości tych należności. W 1999 roku przeprowadzona została w Polsce radykalna reforma tego systemu, zmieniająca nie tylko zasady przyznawania i obliczania wysokości emerytur, ale także samą filozofię funkcjonowania tego elementu zabezpieczenia społecznego. Wprowadzono między innymi kilka filarów emerytalnych oraz radykalnie zmieniono metody wyliczania wysokości świadczeń.

Celem niniejszego opracowania jest charakterystyka przywilejów emerytalnych górników, w nowym zreformowanym systemie ubezpieczeń społecznych.

Emerytura, zwana dawniej rentą starczą, jest świadczeniem pieniężnym z ubezpieczenia społecznego wypłacanym w sytuacji, gdy u danego ubezpieczonego wystąpi określone ryzyko, w tym przypadku wiek uniemożliwiający zarobkowanie na poziomie gwarantującym mu utrzymanie. System zabezpieczenia emerytalnego (w skrócie: zabezpieczenie emerytalne, system emerytalny) można zdefiniować jako istniejące rozwiązania instytucjonalne, zmierzające – na ogół poprzez ustanowienie zasad: 1) gromadzenia oszczędności emerytalnych oraz 2) dokonywania wypłat świadczeń emerytalnych – do zapewnienia uczestnikom systemu niezarobkowych środków utrzymania na okres starości. Sformułowanie takie podkreśla, iż system zabezpieczenia emerytalnego jest

konstrukcją celową i praktyczną, składającą się – w zależności od prowadzonej polityki zabezpieczenia społecznego – z różnorodnych rozwiązań, niekoniecznie zgodnych z ujęciem modelowym systemu, którą odwołuje się do logiki ryzyka starości i zasad jego uprzedzania przez odpowiednie oszczędzanie i zastosowanie ubezpieczenia ze świadczeniem dożywotnim. Gdy w systemie zabezpieczenia emerytalnego dominują rozwiązania o charakterze ubezpieczeniowym, to wtedy uzasadnione jest posługiwanie się określeniem „ubezpieczenie emerytalne”. Mówiąc ścisłym językiem ubezpieczeniowym, chodzi o odpowiednie (ubezpieczeniowe) zorganizowanie wspólnoty ryzyka starości, co w zakresie oszczędzania dotyczy ciągu płatności składkowych do instytucji wspólnego inwestowania (funduszu emerytalnego), a w zakresie wypłat oznacza ekwiwalentne przeznaczenie tych oszczędności na systematyczne świadczenia dożywotnie, ustalane aktuarialnie, na podstawie zgromadzonych oszczędności i przeciętnego dalszego trwania życia [5, 11–12].

System emerytalny ma 2 aspekty: ekonomiczny i społeczny. Podstawowym, strategicznym i globalnym celem każdego systemu świadczeń pieniężnych, w tym także systemu emerytalnego, jest jego efektywność i administracyjna wykonalność. Przy tworzeniu świadczeń i podatków niezbędnych do ich finansowania należy marginalizować ich niekorzystne dla gospodarki skutki, negatywny wpływ na bodźce do pracy i na oszczędności [1, 148].

Wyróżnia się kilka rodzajów systemów emerytalnych: tradycyjny i nowoczesny, naturalny (dobrowolny) i zinstytucjonalizowany (obowiązkowy) czy też finansowy i niefinansowy.

System emerytalny tradycyjny polega na tym, że składka jest jeszcze jedną formą podatku, gdzie opłacenie tej składki tworzy nieprecyzyjnie określone zobowiązania do wypłaty świadczenia. System emerytalny nowoczesny to system, w którym wykorzystywane rozwiązania nie mają decydującego wpływu na wysokość podatków, a zdyskontowana wartość strumienia dochodów systemu jest równa wartości strumienia wydatków zdyskontowanego w tym momencie. Naturalny system emerytalny opiera się na więzach rodzinnych, indywidualnych lub grupowej zapobiegliwości albo solidarności z osobami w podeszłym wieku, niemającymi wystarczających środków do życia. Zinstytucjonalizowany system emerytalny polega na nałożeniu na pokolenie pracujące obowiązku finansowania konsumpcji emerytów poprzez konieczność opłacania składek, z których wypłacane są świadczenia osobom do nich uprawnionym [2, 16–19].

Z indywidualnego punktu widzenia celem systemu emerytalnego jest więc po pierwsze, rozłożenie zasobów w cyklu życia (przesunięcie z okresu aktywności zawodowej na okres emerytalny), po drugie system emerytalny powinien zabezpieczać przed ryzykiem, szczególnie nieznaną długością życia na emeryturze (dwie fazy ryzyka starości obejmowanego zabezpieczeniem emerytalnym –

oszczędzania i ubezpieczenia – wyróżnia T. Szumlicz [8, 39–40]. System emerytalny realizuje także cele ogólnospołeczne, zwłaszcza ochrony przed ubóstwem w okresie starości oraz redystrybucji dochodów w celu uzyskania wyrównania podziału dochodów [3, 42].

W końcu XX wieku niemal wszystkie państwa dokonały reformy emerytalnej (por. [8, 15–16]). Emerytury, przez długi czas jeden z najbardziej stabilnych elementów powojennego kontraktu społecznego, stały się sektorem, w którym zachodzą głębokie zmiany polityczne [4, 305].

## 1. Polski system emerytalny

Polski system emerytalny składa się ze świadczeń z ubezpieczenia społecznego i z zaopatrzenia społecznego. Emerytury z ubezpieczenia społecznego od 1999 roku dzielimy na świadczenia wypłacane z 3 filarów. Pierwszy filar jest obowiązkowy dla wszystkich i funkcjonuje na zasadzie repartycji międzypokoleniowej, drugi filar jest obowiązkowy (w momencie jego wprowadzenia był dla części ubezpieczonych dobrowolny) i jest filarem kapitałowym, natomiast trzeci filar jest całkowicie dobrowolny i kapitałowy.

Emerytura z I filaru ma zapewnić ubezpieczonym środki finansowe pozwalające się utrzymać, po zaprzestaniu pracy. Aby otrzymać to świadczenie, trzeba spełnić określone kryteria. Dla większości ubezpieczonych są one jednakowe, ale istnieją pewne grupy zawodowe, dla których kryteria te są odmienne od standardowych. Radykalna zmiana polskiego systemu emerytalnego, wprowadzona od 1 stycznia 1999 roku (wraz z późniejszymi zmianami), podzieliła emerytury w Polsce na emerytury wypłacane z systemu ubezpieczeń społecznych oraz emerytury wypłacane z zaopatrzenia społecznego. Emerytury wypłacane z systemu ubezpieczeń społecznych charakteryzują się opłacaniem składek emerytalnych, które są podstawą do obliczania wysokości późniejszego świadczenia. Natomiast emerytury z zaopatrzenia społecznego wypłacane są ze środków pochodzących z budżetu państwa, czyli z podatków.

Do emerytur z ubezpieczenia społecznego zaliczamy następujące emerytury:

- emerytury standardowe dla osób urodzonych przed 1.01.1949 r. (tzw. emerytury ze starego systemu),
- emerytury standardowe dla osób urodzonych po 31.12.1948 r. (tzw. emerytury z nowego systemu),
- emerytury przejściowe (wypłacane dla osób przechodzących na emerytury w latach 2009–2013),
- emerytury z II filaru emerytalnego,
- emerytury (lub inne świadczenia) z III filaru emerytalnego,

— emerytury górnicze (uprzywilejowane bez względu na przynależność do starego lub nowego systemu).

Emerytury górnicze zostały wydzielone z wcześniejszych rodzajów emerytur ze względu na specjalne uprzywilejowanie tej grupy ubezpieczonych, bez względu na podział na stary i nowy system emerytalny (pomimo zróżnicowania ich ze względu na datę urodzenia potencjalnych świadczeniobiorców).

Do emerytur z zaopatrzenia społecznego zaliczamy:

- emerytury służb mundurowych (policji, wojska, straży granicznej, służby więziennej, straży pożarnej itd.),
- emerytury prokuratorów i sędziów,
- emerytury rolnicze.

Emerytury rolnicze również należą do emerytur z zaopatrzenia społecznego, ponieważ tylko z nazwy (a nie z podstaw ich finansowania) nazywane są emeryturami z ubezpieczenia społecznego.

## 2. Kryteria nabywania prawa do standardowej emerytury w Polsce

### 2.1. Emerytura z I filaru emerytalnego

W polskim systemie emerytalnym (I filar) kryteria niezbędne do nabycia uprawnień emerytalnych z ubezpieczenia społecznego można podzielić na uprawnienia, jakie muszą spełnić osoby urodzone przed 1.01.1949 roku (tzw. stary system), i osoby urodzone po 31.12.1948 roku (tzw. nowy system).

*Prawo do emerytury dla osób urodzonych przed 1 stycznia 1949 roku*

Do standardowych kryteriów emerytalnych u osób urodzonych przed 1 stycznia 1949 roku zaliczamy:

1. wiek: kobieta 60 lat życia, mężczyzna 65 lat życia,
2. okres składkowy i nieskładkowy: kobieta 15 lat, mężczyzna 20 lat (wariant „liberalny”),
3. okres składkowy i nieskładkowy: kobieta 20 lat, mężczyzna 25 lat (wariant „standardowy”) (por. [7, art. 27–28]).

Aby otrzymać emeryturę, trzeba bezwzględnie spełniać kryterium 1 i 2 lub 3.

Różnica w kryterium okresów składkowych i nieskładkowych jest taka, że przy spełnieniu kryterium „liberalnego” emeryt nie ma gwarantowanej minimalnej wysokości emerytury. W przypadku gdy posiada dłuższy okres składkowy i nieskładkowy (20 lat kobieta i 25 lat mężczyzna), ma zapewnioną ustawowo minimalną wysokość emerytury niezależnie od naliczonej wysokości świadczenia (mniejszego od minimalnej emerytury).

### *Prawo do emerytury dla osób urodzonych po 31 grudnia 1948 roku*

Jedynym kryterium emerytalnym dla osób urodzonych po 31 grudnia 1948 roku jest wiek: dla kobiet 60 lat, a dla mężczyzn 65 lat życia.

## **2.2. Emerytura z II filaru emerytalnego**

Wypłata środków zgromadzonych na rachunku w otwartym funduszu emerytalnym następuje przez przeniesienie tych środków do wskazanego przez członka zakładu ubezpieczeń emerytalnych, w którym wykupił on emeryturę dożywotnią. Wykup emerytury może nastąpić najwcześniej w momencie, gdy wnioskodawca osiągnie wiek emerytalny: kobieta 60 lat życia, mężczyzna 65 lat życia (por. [6, art. 111]).

## **2.3. Emerytura z III filaru emerytalnego**

Kryteria nabywania uprawnień do świadczeń (emerytur) z III filaru są zróżnicowane i uzależnione od formy tego świadczenia. Odrębne kryteria są określone dla świadczeń z Indywidualnych Kont Emerytalnych, odrębne dla emerytur z Pracowniczych Programów Emerytalnych czy też dla świadczeń z dobrowolnych ubezpieczeń na życie.

## **3. Zasady obliczania wysokości standardowych emerytur z I i II filaru emerytalnego**

### **3.1. Obliczanie wysokości standardowych emerytur z I filaru emerytalnego**

Zasady obliczania wysokości emerytur w nowym polskim systemie emerytalnym uzależnione są od daty urodzenia osób ubiegających się o świadczenia. One to determinują powstanie różnic w wysokości wypłacanych świadczeń.

#### *Wysokość standardowej emerytury dla osób urodzonych przed 1.01.1949 roku*

Wysokość emerytury dla osób urodzonych przed dniem 1 stycznia 1949 roku obliczamy według następującego wzoru:

$$E_s = 0,24 \times KB + \frac{MS \times 0,013 \times PWe}{12} + \frac{MN \times 0,007 \times PWe}{12} \quad (1)$$

gdzie:

- Es – emerytura dla osób urodzonych przed 1.01.1949 roku,
- KB – kwota bazowa wynosząca 100% przeciętnego wynagrodzenia w poprzednim roku, pomniejszonego o składki na ubezpieczenie społeczne pobierane od ubezpieczonych,

MS – liczba miesięcy, w których opłacane były składki na ubezpieczenie społeczne,

MN – liczba miesięcy zaliczonych do tzw. okresów nieskładkowych,

PWe – tzw. podstawa wymiaru emerytury (por. [7, art. 15–17, 53]).

Podstawa wymiaru emerytury jest to wskaźnik uzależniający wysokość wypłacanej emerytury od opłacanych składek i uniezależniający ją od wpływu inflacji (w krótkim okresie czasu). W dłuższej perspektywie czasowej od inflacji emeryturę uniezależnia waloryzacja świadczeń emerytalno-rentowych.

Podstawę wymiaru emerytury obliczamy według wzoru:

$$PWe_{10} = \frac{\frac{S_1}{W_1} + \frac{S_2}{W_2} + \dots + \frac{S_{10}}{W_{10}}}{10} \times KB \quad (2)$$

lub

$$PWe_{20} = \frac{\frac{S_1}{W_1} + \frac{S_2}{W_2} + \dots + \frac{S_{20}}{W_{20}}}{20} \times KB \quad (3)$$

gdzie:

- PWe – tzw. podstawa wymiaru emerytury,  
 KB – kwota bazowa wynosząca 100% przeciętnego wynagrodzenia w poprzednim roku pomniejszonego o składki na ubezpieczenie społeczne pobierane od ubezpieczonych,  
 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{20}$  – suma kwot podstawy wymiaru składek w danym roku z kolejnych/wybranych przez zainteresowanego lat kalendarzowych (suma z 12 miesięcy),  
 $W_1, W_2, W_3, \dots, W_{20}$  – roczne kwoty przeciętnego wynagrodzenia ogłoszonego za dany rok kalendarzowy z kolejnych lub wybranych przez zainteresowanego lat kalendarzowych.

Wnioskodawca ubiegający się o emeryturę ma możliwość wyboru, czy podstawa wymiaru jego emerytury liczona będzie z 10 kolejnych lat z ostatnich 20 lat kalendarzowych z jego kariery zawodowej; czy też 20 dowolnych (nie kolejnych) lat z całej jego kariery zawodowej (por. [7, art. 15–17]).

*Wysokość emerytury dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku i objętych ubezpieczeniem społecznym przed 1.01.1999 roku przechodzących na emeryturę po 2013 roku*

Dla osób objętych ubezpieczeniem i przechodzących na emeryturę po 2013 roku (nazwijmy ją umownie emeryturą przejściową) oblicza się, według wzoru:

$$E_p = \frac{K + S}{DT\dot{Z}_1} \quad (4)$$

gdzie:

- $E_p$  – emerytura dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku, a objętych ubezpieczeniem przed 1.01.1999 roku,  
 $K$  – zwaloryzowany tzw. kapitał początkowy,  
 $S$  – kwota składek na ubezpieczenie emerytalne z uwzględnieniem waloryzacji składek zaewidencjonowanych na tzw. koncie indywidualnym ubezpieczonego,  
 $DT\dot{Z}_1$  – średnie dalsze trwanie życia dla osoby w momencie jej przejścia na emeryturę (por. [7, art. 25]).

Kapitał początkowy oblicza się według wzoru:

$$K = (0,24 \times KB \times Wkp + (MS \times 0,013 \times PWe) / 12 + (MN \times 0,007 \times PWe) / 12) \times DT\dot{Z}_1 \quad (5)$$

gdzie:

- $K$  – kapitał początkowy,  
 $Wkp$  – współczynnik proporcjonalności,  
 $KB$  – kwota bazowa wynosząca 100% przeciętnego wynagrodzenia w II kwartale kalendarzowym 1998 roku,  
 $MS$  – liczba miesięcy, w których opłacane były składki na ubezpieczenie społeczne,  
 $MN$  – liczba miesięcy zaliczonych do tzw. okresów nieskładkowych  
 $PWe$  – tzw. podstawa wymiaru emerytury (sposób jej obliczania patrz  $PWe$ , przy czym bierze się pod uwagę okres 10 kolejnych lat kalendarzowych z okresu od 1.01.1980 do 31 grudnia 1998 roku (por. [7, art. 174]).

*Wysokość emerytury dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku i nieobjętych ubezpieczeniem społecznym przed 1.01.1999 roku*

Wysokość emerytury dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku i nieubezpieczonych przed 1.01.1999 roku obliczamy według wzoru:

$$E_n = \frac{S}{DT\dot{Z}_1} \quad (6)$$

gdzie:

- $E_n$  – emerytura dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku,

S – kwota składek na ubezpieczenie emerytalne z uwzględnieniem waloryzacji składek zaewidencjonowanych na tzw. koncie indywidualnym ubezpieczonego,

DTŻ<sub>1</sub> – średnie dalsze trwanie życia dla osoby w momencie jej przejścia na emeryturę (dalsze trwanie życia jest podawane corocznie w komunikacie Prezesa GUS).

Średnie dalsze trwanie życia – DTŻ<sub>1</sub> jest określane wspólnie dla kobiet i mężczyzn i wyrażane jest w miesiącach (por. [7, art. 25–26]).

*Wysokość emerytury dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku i objętych ubezpieczeniem społecznym przed 1.01.1999 roku a przechodzących na emeryturę w latach 2009–2013*

Osoby przechodzące na emeryturę w latach 2009–2013 i niebędące członkami otwartych funduszy emerytalnych będą otrzymywać emeryturę obliczona według następujących wzorów:

1. Wniosek o emeryturę złożony w 2009 roku:

$$E_{2009} = 0,8 \times Es + 0,2 \times En \quad (7)$$

2. Wniosek o emeryturę złożony w 2010 roku:

$$E_{2010} = 0,7 \times Es + 0,3 \times En \quad (8)$$

3. Wniosek o emeryturę złożony w 2011 roku:

$$E_{2011} = 0,55 \times Es + 0,45 \times En \quad (9)$$

4. Wniosek o emeryturę złożony w 2012 roku:

$$E_{2012} = 0,35 \times Es + 0,65 \times En \quad (10)$$

5. Wniosek o emeryturę złożony w 2013 roku:

$$E_{2013} = 0,2 \times Es + 0,8 \times En \quad (11)$$

gdzie  $Es$  i  $En$  obliczamy według wzorów przedstawionych powyżej.

### 3.2. Obliczanie wysokości emerytury z II filaru emerytalnego

Wysokość emerytury z II filaru uzależniona jest od kwoty zgromadzonej na rachunku funduszu i od wieku ubezpieczonego, w którym chce on przejść na emeryturę. Oblicza się ją według wzoru:

$$E_{2f} = \frac{ST}{DT\check{Z}_2} \quad (12)$$



gdzie:

$E_{2f}$  – emerytura z II filaru,

ST – wartość środków transferowanych do zakładu emerytalnego,

$DT\check{Z}_2$  – przeciętne dalsze trwanie życia dla osoby w wieku  $n$  lat ( $n$  = ilość lat życia wnioskodawcy) liczone odrębnie dla każdej z płci.

## 4. Emerytura górnicza

### 4.1. Kryteria nabywania emerytury górniczej

Górnicy jako jedyna grupa zawodowa funkcjonująca w polskim systemie emerytur z ubezpieczenia społecznego mają zagwarantowane specjalne przywileje, niezależne od zasad regulujących funkcjonowanie pozostałych emerytur z tego systemu. Przywileje te są efektem protestów społecznych tej grupy zawodowej w latach poprzedzających kolejne wybory parlamentarne. Protesty te (w latach 1999–2006) miały na celu przyznanie dodatkowych uprawnień dla ubezpieczonych górników w porównaniu do pozostałych ubezpieczonych. Uzyskane przywileje dotyczą zarówno korzystniejszych warunków przy nabywaniu prawa do emerytury, jak i sposobu obliczania jej wysokości oraz określenia katalogu prac zaliczanych do pracy w górnictwie.

W tej grupie zawodowej również występuje podział uprawnień uzależniony od daty urodzenia, ale ponadto górnicy mają prawo do przechodzenia na emeryturę bez względu na wiek, jeżeli spełniają określone wymagania co do czasu pracy w górnictwie.

#### *Prawo do emerytury górniczej dla osób urodzonych przed 1.01.1949 roku*

Prawo do emerytury mają górnicy, jeżeli

1. Mężczyzna lub kobieta ukończyli 55 lat życia i posiadają 25-letni (mężczyzna) lub 20-letni (kobieta) okres pracy górniczej lub okres pracy zaliczany do pracy górniczej, lub okres pracy równorzędny z pracą górniczą, w tym co najmniej 5 lat pracy górniczej;
- lub
2. Mężczyzna lub kobieta ukończyli 50 lat życia i posiadają 25-letni (mężczyzna) lub 20-letni (kobieta) okres pracy górniczej lub okres pracy zaliczany do pracy górniczej, lub okres pracy równorzędny z pracą górniczą, w tym co najmniej 15 lat pracy górniczej (por. [7, art. 34]).

*Prawo do emerytury górniczej dla osób urodzonych po 31.12.1948 roku, a przed 1.01.1969 roku*

3. Prawo do emerytury górniczej przysługuje również osobie spełniającej powyższe kryteria i niebędącej członkiem otwartego funduszu emerytalnego, jeżeli spełni te kryteria do końca roku 2008 (por. [7, art. 49]).

*Prawo do emerytury górniczej bez względu na wiek*

Prawo do emerytury górniczej bez względu na wiek i zajmowane stanowisko przysługuje pracownikom, którzy pracę górniczą wykonywali pod ziemią stale i w pełnym wymiarze czasu pracy, przez okres wynoszący co najmniej 25 lat (por. [7, art. 48]).

#### **4.2. Katalog prac uznanych za pracę górniczą i prace równorzędne z pracą górniczą lub prace zaliczane do prac górniczych**

W aktualnym polskim zbiorze przepisów prawnych dotyczących emerytur górniczych precyzyjnie określono, jakie zadania lub obowiązki wykonywane w kopalniach uprawniają do uzyskania emerytury górniczej.

Przy ustalaniu prawa do emerytury górniczej uwzględnia się okresy pracy górniczej i pracy równorzędnej z pracą górniczą oraz okresy zaliczane do pracy górniczej, będące okresami składkowymi lub nieskładkowymi, z tym że okresy pracy górniczej i pracy równorzędnej z pracą górniczą uwzględnia się, jeżeli praca ta wykonywana była co najmniej w połowie wymiaru czasu pracy. Za pracę górniczą uważa się zatrudnienie:

- 1) pod ziemią w kopalniach węgla, rud, kruszców, surowców ogniotrwałych, glin szlachetnych, kaolinów, magnezytów, gipsu, anhydrytu, soli kamiennej i potasowej, fosforytów oraz barytu;
- 2) pod ziemią i przy głębieniu szybów w przedsiębiorstwach budowy kopalń oraz pod ziemią w przedsiębiorstwach i innych podmiotach wykonujących dla tych kopalń roboty górnicze lub przy budowie szybów;
- 3) pod ziemią w przedsiębiorstwach montażowych, przedsiębiorstwach maszyn górniczych, zakładach naprawczych i innych podmiotach wykonujących dla kopalń podziemne roboty budowlano-montażowe, roboty przy naprawie maszyn i wdrażaniu nowych urządzeń; pracownikom zatrudnionym w tych przedsiębiorstwach, zakładach i innych podmiotach uznaje się za pracę górniczą te miesiące zatrudnienia, w których co najmniej połowę dniówek roboczych przepracowali pod ziemią;
- 4) na odkrywce w kopalniach siarki i węgla brunatnego przy ręcznym lub zmechanizowanym urabianiu, ładowaniu oraz przewozie nadkładu i złoża, przy pomiarach w zakresie miernictwa górniczego oraz przy bieżącej konserwacji agregatów i urządzeń wydobywczych, a także w kopalniach otworowych

- siarki oraz w przedsiębiorstwach i innych podmiotach wykonujących roboty górnicze dla kopalń siarki i węgla brunatnego, na stanowiskach określonych w drodze rozporządzenia przez ministra właściwego do spraw zabezpieczenia społecznego, w porozumieniu z ministrem właściwym do spraw gospodarki i ministrem właściwym do spraw Skarbu Państwa;
- 5) pod ziemią na stanowiskach dozoru ruchu oraz kierownictwa ruchu kopalń, przedsiębiorstw, a także w kopalniach siarki i węgla brunatnego oraz w przedsiębiorstwach na stanowiskach określonych w drodze rozporządzenia przez ministra właściwego do spraw gospodarki, w porozumieniu z ministrem właściwym do spraw Skarbu Państwa i ministrem właściwym do spraw zabezpieczenia społecznego;
  - 6) w charakterze członków drużyn ratowniczych kopalń, mechaników sprzętu ratowniczego tych drużyn oraz w charakterze ratowników zawodowych w stacjach ratownictwa górniczego;
  - 7) na stanowiskach maszynistów wyciągowych na szybach oraz na stanowiskach sygnalistów na nadszybiach szybów w kopalniach, przedsiębiorstwach;
  - 8) na stanowiskach pracy pod ziemią w nieczynnych kopalniach;
  - 9) na stanowiskach nauczycieli (instruktorów) zawodu w górniczych polach szkoleniowych pod ziemią oraz w kopalniach siarki i węgla brunatnego;
  - 10) w urzędach górniczych, jeżeli zatrudnienie jest związane z wykonywaniem czynności inspekcyjno-technicznych w kopalniach, przedsiębiorstwach;
  - 11) w przedsiębiorstwach i innych podmiotach miernictwa górniczego lub geologicznych, jeżeli zatrudnienie jest wykonywane bezpośrednio przy pomiarach z zakresu miernictwa górniczego, geologii i hydrologii; pracownikom zatrudnionym w tych przedsiębiorstwach i podmiotach uznaje się za pracę górniczą te miesiące zatrudnienia, w których co najmniej połowę dniówek roboczych przepracowali pod ziemią;
  - 12) w charakterze lekarzy i felczerów w górniczych zespołach opieki zdrowotnej, w zakładach górniczej służby zdrowia przy kopalniach węgla kamiennego i rud oraz w zakładach służby zdrowia kopalń siarki lub węgla brunatnego, jeżeli pracownicy ci są zatrudnieni w tych zakładach w łącznym wymiarze co najmniej 30 godzin tygodniowo oraz wykonują systematyczną kontrolę sanitarnohigieniczną stanowisk pracy pod ziemią, w kopalniach siarki lub węgla brunatnego – co najmniej przez 20 godzin w ciągu miesiąca, przy czym do okresu 20 godzin kontroli sanitarnohigienicznej stanowisk pracy pod ziemią wlicza się również czas zużyty na zjazd i wyjazd ze stanowisk pracy pod ziemią;
  - 13) na równi z okresami pracy górniczej traktuje się okres urlopu górniczego do 5 lat oraz okres świadczenia górniczego do 3 lat.

Za pracę równorzędną z pracą górniczą uważa się:

- 1) pełnienie przez pracowników funkcji z wyboru w organach związku zawodowego zrzeszającego pracowników kopalń, przedsiębiorstw, jeżeli pracownicy ci bezpośrednio przed objęciem tych funkcji wykonywali pracę górniczą;
- 2) zatrudnienie na stanowiskach wymagających kwalifikacji inżyniera lub technika w zakresie górnictwa:
  - a) w administracji kopalń, przedsiębiorstw oraz w zarządach spółek węglowych, byłych gwarectwach, zrzeszeniach i zjednoczeniach tych kopalń i przedsiębiorstw;
  - b) w urzędach górniczych;
  - c) na stanowiskach nauczycieli w górniczych szkołach zawodowych i technicznych;
  - d) w urzędach naczelnych i centralnych organów administracji państwowej oraz w urzędach terenowych organów administracji, będących organami założycielskimi kopalń i przedsiębiorstw, a także w jednostkach podległych tym organom, jeżeli jednostki te działają w zakresie przemysłów określonych w stosownych przepisach, pod warunkiem uprzedniego przepracowania w kopalniach, przedsiębiorstwach co najmniej 5 lat pod ziemią, na odkrywce w kopalniach siarki lub węgla brunatnego, a także w kopalniach otworowych siarki albo na stanowiskach dozoru lub kierownictwa ruchu;
- 3) zatrudnienie na stanowiskach wymagających kwalifikacji inżyniera lub technika w zakresie górnictwa pracowników i przeniesionych do urzędów naczelnych i centralnych organów administracji państwowej, do instytutów podporządkowanych tym organom, do pracy w wyższych szkołach górniczych i w wydawnictwach górniczo-hutniczych, jeżeli pracownicy ci przepracowali uprzednio w kopalniach, przedsiębiorstwach 4 co najmniej 5 lat pod ziemią, na odkrywce w kopalniach siarki lub węgla brunatnego, a także w kopalniach otworowych siarki albo na stanowiskach dozoru lub kierownictwa ruchu;
- 4) zatrudnienie przy innych pracach, nie dłuższe niż 5 lat, do których pracownicy przeszli w drodze wyboru lub zalecenia jednostki nadrzędnej albo w związku z likwidacją kopalni, zakładu górniczego, przedsiębiorstwa.

Za pracowników zatrudnionych na stanowiskach wymagających kwalifikacji inżyniera lub technika w zakresie górnictwa uważa się osoby, które:

- 1) posiadają tytuł inżyniera lub technika i są zatrudnione zgodnie z posiadanymi kwalifikacjami w zakresie górnictwa albo
- 2) nie posiadają tytułu inżyniera lub technika, lecz mają praktyczne przygotowanie nabyte w czasie wykonywanej uprzednio, co najmniej przez 5 lat, pracy na stanowiskach w dozorcze ruchu lub w innej pracy pod ziemią albo

w kopalniach siarki lub węgla brunatnego oraz wykonują czynności, które wymagają kwalifikacji inżyniera lub technika i są powierzane inżynierom lub technikom.

Przy ustalaniu prawa do górniczej emerytury pracownikom zatrudnionym pod ziemią oraz w kopalniach siarki lub węgla brunatnego zalicza się w wymiarze półtorakrotnym następujące okresy pracy na obszarze państwa polskiego:

- 1) w przodkach bezpośrednio przy urabianiu i ładowaniu urobku oraz przy innych pracach przodkowych, przy montażu, likwidacji i transporcie obudów, maszyn urabiających, ładujących i transportujących w przodkach oraz przy głębieniu szybów i robotach szybowych;
- 2) w drużynach ratowniczych;
- 3) w charakterze mechaników sprzętu ratowniczego drużyn ratowniczych.

Okresy pracy zalicza się w wymiarze półtorakrotnym również tym pracownikom dozoru ruchu i kierownictwa ruchu kopalń, którzy pracują przez co najmniej połowę dniówek roboczych w miesiącu pod ziemią, w kopalniach siarki lub w kopalniach węgla brunatnego (por. [7, art. 35–39]).

#### 4.3. Obliczanie wysokości emerytury górniczej

Wysokość emerytury górniczej oblicza się według następującego wzoru:

$$E_g = 0,24 \times KB + \frac{MS \times P \times PWe}{12} + \frac{MN \times 0,007 \times PWe}{12} \quad (13)$$

gdzie:

- KB – kwota bazowa wynosząca 100% przeciętnego wynagrodzenia w poprzednim roku pomniejszonego o składki na ubezpieczenie społeczne pobierane od ubezpieczonych,
- P – przelicznik:
- 0,018** – za każdy rok pracy pod ziemią w przodkach, w drużynach ratowniczych,
  - 0,015** – za każdy rok pracy górniczej wykonywanej pod ziemią stale i w pełnym wymiarze czasu pracy,
  - 0,014** – za każdy rok pracy w pełnym wymiarze czasu pracy wykonywanej częściowo na powierzchni i częściowo pod ziemią,
  - 0,012** – za każdy rok pracy wykonywanej stale i w pełnym wymiarze czasu pracy na odkrywcę,
- MS – liczba miesięcy, w których opłacane były składki na ubezpieczenie społeczne,
- MN – liczba miesięcy zaliczonych do tzw. okresów nieskładkowych,

PWe – tzw. podstawa wymiaru emerytury (sposób jej obliczania według zasad określonych wcześniej; por. [7, art. 51–53]).

Zasady obliczania wysokości emerytur górniczych stawiają w znacznie korzystniejszym położeniu (jeśli chodzi o wysokość emerytury) tę grupę zawodową w stosunku do wszystkich pozostałych grup zawodowych. Zastosowanie tzw. przelicznika uprawnia górników do wyższych świadczeń niż mają prawo pozostali ubezpieczeni, bez konieczności opłacania wyższych składek.

## **5. Analiza porównawcza wysokości i czasu pobierania świadczenia standardowego i górniczego**

Określając uprawnienia górników do świadczeń emerytalnych w Polsce, można sformułować twierdzenie o ich korzystniejszych rozwiązaniach w stosunku do pozostałych ubezpieczonych. Rozwiązania dla górników są korzystniejsze ze względu na wiek, w którym nabywają prawa do emerytury, oraz ze względu na formułę, według której obliczone zostaje ich świadczenie. Przyjęte w tym zakresie rozwiązania legislacyjne stanowią podstawę do przedstawienia poniższych symulacji.

### **5.1. Przywileje górników związane z zastosowaną formułą obliczania wysokości emerytury**

Zarówno górnicy, jak i pozostali ubezpieczeni opłacają składki w identycznej wysokości od tej samej podstawy wymiaru składki (wysokość ta wynosi 19,52%). Zastosowanie różnych formuł obliczania wysokości świadczenia (wzór nr 1 i wzór nr 13) powoduje, że emerytury górnicze są wyższe od standardowych, pomimo opłacania identycznych składek. Nie ma tutaj z pewnością zastosowania zasada, że suma składek winna być równa sumie wypłacanych świadczeń. Powstała różnica (czyli konieczność wypłacania wyższych świadczeń dla górników) musi być finansowana z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych (czyli ze składek pozostałych ubezpieczonych) bądź z budżetu państwa (czyli z podatków).

**Tabela 1.** Symulacja wysokości wypłacanych emerytur (standardowych i górniczych)

Ubezpieczony	Wysokość emerytury w złotych miesięcznie								
	przy $n_1 = 25$ lat			przy $n_2 = 30$ lat			przy $n_3 = 35$ lat		
	Część socjalna <sup>2</sup>	Część ubezpieczeniowa	Razem	Część socjalna <sup>2</sup>	Część ubezpieczeniowa	Razem	Część socjalna <sup>2</sup>	Część ubezpieczeniowa	Razem
Górnik pracujący na przodku	480	1350	<b>1830</b>	480	1620	<b>2100</b>	480	1890	<b>2370</b>
Górnik pracujący pod ziemią	480	1125	<b>1605</b>	480	1350	<b>1830</b>	480	1575	<b>2055</b>
Pozostali ubezpieczeni	480	975	<b>1455</b>	480	1170	<b>1650</b>	480	1365	<b>1845</b>

<sup>1</sup> – symulacja zakłada, że kwota bazowa  $K_b = 2000$  zł, podstawa wymiaru emerytury  $P_{We} = 150\%$ , liczba miesięcy składkowych  $MS = 100\%$ , a liczba miesięcy nieskładkowych  $MN = 0\%$ , okres ubezpieczenia  $n_1 = 25$  lat (300 miesięcy),  $n_2 = 30$  lat (360 miesięcy),  $n_3 = 35$  lat (420 miesięcy);

<sup>2</sup> – część socjalna czyli 24% kwoty bazowej.

Źródło: opracowanie własne na podstawie wzoru 1 i wzoru 13.

## 5.2. Przywileje górników związane z kryterium wiekowym przy nabywaniu prawa do emerytur

Obniżenie wieku emerytalnego (a praktycznie jego zniesienie przy zastosowaniu zasady wymaganej minimalnej ilości przepracowanych lat) spowodowało, że emeryt górnik ma potencjalnie znacznie dłuższy okres pobierania emerytury niż pozostali ubezpieczeni. Zastosowanie zasady pokrycia wydatków na świadczenia z wpłaconych wcześniej składek powoduje, że środki na wypłatę emerytur dla górników wyczerpią się znacznie wcześniej niż w przypadku innych ubezpieczonych. Powstały niedobór (czyli konieczność wypłacania świadczeń dla górników w okresie dłuższym niż standardowy) musi być również finansowany z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych (czyli ze składek pozostałych ubezpieczonych) bądź z budżetu państwa (czyli z podatków). Przeznaczanie środków pochodzących z podatków na dopłaty do wypłat emerytur zwiększa deficyt budżetowy oraz zmniejsza możliwości budżetu państwa w zakresie inwestowania w gospodarce.

**Tabela 2.** Symulacja długości wypłaty świadczeń emerytalnych

Ubezpieczeni	Wiek emerytalny <sup>1</sup>	Okres opłacania składek	Przeciętna długość życia w Polsce <sup>2</sup>	Okres pobierania emerytury
górnicy	43	25	70	27
pozostali	65	42	70	5

<sup>1</sup> – dotyczy mężczyzn, przy założeniu podlegania ubezpieczeniu społecznemu od 18 roku życia.

<sup>2</sup> – przyjęto hipotetycznie, że przeciętnie wynosi on 70 lat dla obydwójga płci w Polsce.

Źródło: opracowanie własne na podstawie [12, art. 27, 28, 34, 48].

Na podstawie przedstawionych symulacji jednoznacznie stwierdzić można, że górnicy jako grupa ubezpieczonych korzystają z niestandardowych rozwiązań zwanych powszechnie przywilejami. Akcje protestacyjne podejmowane w latach poprzednich przez tę grupę zawsze były skuteczne (z punktu widzenia zainteresowanych), ale destrukcyjne dla finansowania systemu ubezpieczeń społecznych w Polsce.

## Zakończenie

Grupa zawodowa górników jest szczególnie uprzywilejowana w polskim systemie emerytalnym. Swoje przywileje zdobyła dzięki protestom społecznym, które zawsze nasilały się tuż przed każdymi wyborami parlamentarnymi. Jej uprzywilejowanie odbywa się kosztem pozostałych ubezpieczonych. Opłacanie identycznej wysokości składek na ubezpieczenie emerytalne daje wyższe emerytury górnikom niż innym ubezpieczonym. Koszty tych emerytur ponoszą pozostali ubezpieczeni lub podatnicy, w przypadku niedoborów Funduszu Ubezpieczeń Społecznych. Powodem takiego stanu rzeczy jest fakt, iż to budżet państwa jest gwarantem wypłaty świadczeń emerytalnych z I filaru emerytalnego. Zasady reformy emerytalnej wprowadzone w 1999 roku zostały zniszczone przez kierowanie się posłów aktualną koniunkturą wyborczą, a jednocześnie prawie wszystkie nowelizacje przepisów dotyczących emerytur i rent, wprowadzone po 1.01.1999 roku, zaprzępaściły ekonomiczną zasadę równości (opłacania identycznej wysokości składek i otrzymywania świadczeń ekwiwalentnych do wysokości opłacanych składek) wszystkich ubezpieczonych. Nie podlega żadnej dyskusji fakt specyfiki pracy górniczej, jej trudności i negatywnego oddziaływania na zdrowie osób ją wykonujących. Ale przywileje wcześniejszego przechodzenia górników na emeryturę winny wynikać nie tyle z faktu wykonywania niebezpiecznej pracy, co uiszczania wyższej składki emerytalnej przez pracodawców sektora górniczego, a nie przez wszystkich ubezpieczonych. Analogiczna sytuacja jest w metodzie wyliczania wysokości emerytur górniczych.



Koszty jej przyznania winni ponosić pracodawcy, a nie pozostali ubezpieczeni czy też podatnicy. Tak skonstruowany system emerytalny zamiast usprawnić swoje funkcjonowanie, zachowuje błędy starego systemu. Sankcjonowanie grup uprzywilejowanych – nie tylko górników, ale również innych, na przykład grup zawodowych uprawnionych do emerytur pomostowych – spowoduje w niedalekiej przyszłości załamanie podstaw finansowych polskiego systemu emerytalnego, reformowanego lub raczej zmienionego w 1999 roku.

## Literatura

- [1] Barr N., *The Objectives and Attainments Pension Schemes*, [w:] *State and Social Welfare Objective of Policy*, ed. T-D. Wilson, Longman, London and New York 1991.
- [2] Góra M., *System emerytalny*, PWE, Warszawa 2003.
- [3] Holzmann R., Hinz R., *Old-Age Income Support in the Twenty-First Century: An International Perspective on Pension Systems and Reform* (razem z H. von Gersdorff, I. Gill, G. Impavido, A.R. Musalem, M. Rutkowski, R. Palacios, Y. Sin, K. Subarao, A. Schwartz), Web Version, 18 February 2005, The World Bank ([www.worldbank.org/sp/incomes/OldAgesSupport-PrelimWeb.pdf](http://www.worldbank.org/sp/incomes/OldAgesSupport-PrelimWeb.pdf)).
- [4] Myles J., Person P., *The Comparative Political Economy of Pension Reform*, [w:] *The New Politics of the Welfare State*, red. P. Pierson, Oxford University Press, New York 2001.
- [5] Szumlicz T., *Zabezpieczenie emerytalne w systemach zabezpieczenia społecznego*, [w:] *Systemy emerytalne w krajach Unii Europejskiej*, pod red. T. Szumlicza i M. Żukowskiego, Twigger, Warszawa 2004.
- [6] Ustawa z dnia 28.08.1997 roku *O organizacji i funkcjonowaniu funduszy emerytalnych*, Dz.U. nr 139/1997, poz. 934 wraz ze zmianami.
- [7] Ustawa z 17.12.1998 roku *O emeryturach i rentach z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych*, Dz.U. nr 162/1998, poz. 1118 wraz ze zmianami.
- [8] Żukowski M., *Reformy emerytalne w Europie*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 2006.

## Streszczenie

W 1999 roku wprowadzona została w Polsce reforma systemu ubezpieczeń społecznych obejmująca między innymi nowe zasady przyznawania świadczeń emerytalnych. W referacie opisano nowy polski system świadczeń z ubezpieczenia społecznego. Zasadnicza część referatu charakteryzuje przywileje górni-

ków w systemie emerytalnym. W referacie przedstawiono analizę porównawczą w zakresie wysokości potencjalnych emerytur standardowych i górniczych oraz okresy wypłaty tych świadczeń.

## **Summary**

### **Mining Pensions in the Polish Pension System**

In 1999 were introduced stay in the Poland reform of the system of national insurance schemes hugging among others new principles of granting pension services. The new Polish system of services was described in the report from national insurance scheme. The principal part of the report characterizes miners privileges in the pension system. The comparative analysis was introduced in the report in the range of the height of potential standard and mining pensions and periods of payment of these services.

Roman Pluta

## **Uwarunkowania decyzji dotyczących koszyka podstawowych świadczeń zdrowotnych**

Koszyk podstawowych świadczeń zdrowotnych realizowanych przez publiczną opiekę zdrowotną jest wynikiem wielu określonych uwarunkowań związanych z bezstronnością proceduralną, sprawiedliwością dystrybucyjną, poprawą efektywności, unikaniem ryzyka, solidarnością społeczną, konkurencją regulowaną i postępem medycznym. W takiej sytuacji, zdefiniowanie koszyka podstawowego oznacza powstanie możliwości zakupu świadczenia z własnej kieszeni przez pacjenta, co rodzi poważne konsekwencje dla rankingu świadczeń dla potrzeb tworzenia koszyka. W szczególności, w przypadku świadczeń o takich samych poziomach wskaźnika efekt/koszt, zbliżonych do poziomu progowego, do koszyka podstawowego powinny być włączane świadczenia drogie, natomiast niewłączane świadczenia tanie, które powinny być kupowane indywidualnie. W związku z powyższym, procedura podejmowania decyzji dotyczących podstawowego koszyka musi składać się przynajmniej z następujących faz: wybór chorób, selekcja świadczeń, kompensacja ocen i odpłatność indywidualna.

### **1. Wstęp**

Opieka lekarska podlega racjonowaniu od dawna. Określone rozmieszczenie lekarzy i środków leczenia, poziom mobilności i zdolności płatniczej pacjentów determinują ramy decyzji podejmowanych według uznania osób odpowiedzialnych za proces leczenia. Diagnozowanie niezbędności leczenia, kolejka oczekujących, zmniejszenie intensywności terapii czy stosowanie tańszych substytutów można wykorzystywać do ukrytej kontroli kosztów leczenia. Takie sposoby racjonowania opieki nie są widoczne, ponieważ przesłonięte są kulturowymi kategoriami, politycznymi ideami, ekonomicznymi zasadami i klinicznymi regułami.

Ukryte racjonowanie opieki zdrowotnej jest związane z istotą stosunków między lekarzem i pacjentem (por. [5]). Wynik transakcji zawartej przez pacjen-

ta z lekarzem jest często niepewny i w większym stopniu zależy od doświadczenia i osądu, niż od nauki. Czynniki kulturowe i psychospołeczne wpływają na potrzeby, preferencje i reakcję na opiekę. Pacjenci są bardzo zróżnicowani. W podobnych medycznych okolicznościach reakcje pacjentów na określoną terapię i ich opinie na temat leczenia mogą być przeciwstawne. W efekcie opieka zdrowotna jest wysoce zindywidualizowana. Jednocześnie jest ona procesem, w którym relacje między lekarzem i pacjentem rozwijają się iteracyjnie i bieg wydarzeń nie może być znany wcześniej (por. [5]). Jest to proces odkrywania i negocjacji. Informacje o stanie pacjenta ujawniają się sekwencyjnie i decyzje są podejmowane w toku coraz lepszego poznawania pacjentów przez lekarzy i dojrzwania pacjentów do akceptacji określonych działań. Proces ten cechuje się dużą elastycznością, gdyż trzeba brać pod uwagę wiele ewentualności, które wiążą się z dodatkowymi chorobami czy specyficznymi sytuacjami życiowymi.

Ukryte racjonowanie pozwala w porę i w miarę reagować na złożoność, różnorodność i zmienność informacji. Jego podstawą jest zaufanie pacjenta do lekarza, które opiera się na jakości komunikacji lekarza z pacjentem i wrażliwości lekarza na potrzeby i preferencje pacjenta. Jednak ukryte racjonowanie jest narażone na nadużycie zaufania i prawa do decydowania. Decyzje lekarza mogą wynikać z jego społecznych uprzedzeń (rasowych, klasowych, płciowych lub związanych z wiekiem) i dawać przewagę tym pacjentom, którzy podzielają wartości lekarza czy też są bardziej atrakcyjni lub ustosunkowani. W warunkach dużej nierównowagi między możliwościami opieki a zapotrzebowaniem na opiekę może prowadzić to do zniechęcania pacjentów do leczenia, które jest im potrzebne (por. [5]). Jeśli wielu pacjentom odmawia się skutecznej terapii, świadomość tego wymusza publiczną dyskusję o alokacji zasobów i odpowiedzialności publicznej za opiekę zdrowotną. Ukryte racjonowanie przeobraża się w racjonowanie jawne.

## 2. Bezstronność proceduralna

Rozwój jawnego racjonowania jest związany z funkcjonowaniem publicznej opieki zdrowotnej. W obliczu konieczności racjonowania świadczeń z powodu niedostatecznych środków zainteresowane podmioty nie działają wcale za zasłonną niewiedzy Rawlsa (por. [8]). W takiej sytuacji, jeśli podmioty są zainteresowane określonymi efektami zdrowotnymi, które w przypadku ograniczonych środków mogą się wykluczać, to szanse osiągnięcia rozwiązania definiowanego jedynie w kategoriach efektów zdrowotnych są znikome. Niewiele osób jest w stanie poświęcić swoje zdrowie dla zdrowia innych nieznanymi sobie osób. Rozwiązanie konfliktu może być osiągalne dzięki odwołaniu się do kryteriów

proceduralnych. Przeciwwstawne strony mogłyby akceptować niekorzystne rozstrzygnięcia, jeśli byłyby one rezultatem uprzednio wzajemnie uzgodnionych procedur podejmowania decyzji (por. [8]). Procedury nabierają znaczenia również dlatego, że same efekty są niepewne. Jeśli doświadcza się niekorzystnego skutku, to podmioty pragną ustalić działania, które go spowodowały, zanim rozdziela nagrody i kary. Dzięki odniesieniu do akceptowanych procedur, w przypadku pojawienia się niekorzystnego stanu rzeczy, można bezstronnie ocenić działania i ustalić bezstronnie odpowiedzialność podmiotową.

Procedura, którą swobodnie uzgadniają strony konfliktu, nie może i nie będzie preferować żadnej strony. Musi być sama uznana za bezstronną. Kiedy podejmuje się decyzje dotyczące życia i śmierci, jak w przypadku alokacji rzadkich zasobów medycznych, wtedy proceduralna bezstronność staje się szczególnie istotnym warunkiem prawomocności instytucji i akceptacji ich decyzji (por. [8]). Stąd niezmiernie ważne jest ustalenie konstytutywnych cech bezstronnego stanowienia priorytetów w opiece zdrowotnej.

Jego podstawowe ramy opracowano w postaci koncepcji tzw. odpowiedzialności za zasadność (por. [4]). Zgodnie z nią, procedura może być uznana za bezstronną, jeśli spełnia przynajmniej cztery warunki:

1. uzasadnienie decyzji ustanawiających priorytety musi być publicznie dostępne (warunek upublicznienia);
2. uzasadnienie to musi być uznane przez osoby bezstronne za mające znaczenie dla stanowienia priorytetów w podanym kontekście; osoba bezstronna jest osobą, która nie znajduje się w sytuacji konfliktu interesów (warunek merytoryczności);
3. musi istnieć tryb odwoławczy od tych decyzji i ich uzasadnienia (warunek apelacji);
4. muszą istnieć środki, które w trybie dobrowolnym lub nadzoru, zapewniają spełnianie trzech pierwszych warunków (warunek obowiązywania).

Obecnie prowadzi się badania mające na celu operacjonalizację powyższych warunków. Dotyczy to szczególnie warunku merytoryczności i warunku obowiązywania.

Duże zróżnicowanie osób podejmujących decyzje okazuje się fundamentem merytoryczności. Obecność wielu perspektyw zwiększa prawdopodobieństwo tego, że uwzględni się wystarczająco szeroką gamę istotnych wartości i zasad. Prawdopodobieństwo to zwiększy się jeszcze bardziej wtedy, kiedy dokonuje się zewnętrznych konsultacji czy ekspertyz, które mogą uzupełnić immanentne ograniczenia wziętych już wcześniej pod uwagę perspektyw. Konsekwencją kluczowego znaczenia różnorodności perspektyw jest to, że za preferowaną metodę podejmowania decyzji dotyczących priorytetów w opiece zdrowotnej uznaje się

konsensus, a nie zasadę większości czy zasadę elitarności (por. [4]). Konsensus uniemożliwia bowiem wyeliminowanie „niepoprawnych” punktów widzenia. Wobec powyższego, osoby bezstronne to nie tylko osoby wolne od konfliktu interesów, a więc mogące szczerze, bez skrywania prawdziwych intencji, prezentować swe poglądy. Osoby bezstronne to osoby, które dążą do współpracy i szukania kompromisu uwzględniającego wielość perspektyw, które odkrywają treść dobra wspólnego.

Niezwykle ważna jest też realizacja warunku obowiązywania w trybie dobrowolnym. Tutaj główną rolę odgrywa sposób kierowania tokiem dyskusji. Chodzi o to, by przewodniczący ciał decyzyjnych zapewniali udział wszystkim członków i poddawali rozpatrzeniu wszystkie kwestie istotne z punktu widzenia odmiennych perspektyw. Służy temu uwzględnianie w porządku obrad wniosków mniejszościowych. Z uwagi na fakt, że zróżnicowanie perspektyw wiąże się zwykle z obecnością osób bez przygotowania medycznego, przewodniczący powinni interweniować w przebieg dyskusji, prosząc o streszczenia dotychczasowej debaty i powtórne wyjaśnienia istotnych kwestii (por. [4]).

### 3. Sprawiedliwość dystrybucyjna

Bezstronna procedura prowadzi do ujawniania się w czasie debaty różnorodnych wartości, zasad i interesów dotyczących priorytetów w alokacji zasobów. Wyżej zarysowane warunki bezstronności determinują to, iż mogą to być priorytety sprawiedliwej alokacji. Jednak samo rozumienie sprawiedliwości dystrybucyjnej nie jest jednolite. Tym samym różnorodność perspektyw nieuchronnie staje się odmiennością stanowisk etycznych. W najnowszej literaturze z zakresu etyki medycyny wyróżnia się przynajmniej cztery ważne stanowiska: liberalizm, egalitaryzm, utylitaryzm i komunitarianizm (por. [2]).

Najważniejszymi zasadami liberalizmu są prawo do wolności osobistej i własności prywatnej. Państwo nie powinno ingerować wtedy, kiedy obywatele domagają się i korzystają z tych praw. Pod jednym warunkiem, mianowicie że dążenia do uzyskania wolności i własności osobistej nie powodują ograniczania prawa innych obywateli do wolności i własności. W prawdziwie liberalnym społeczeństwie system opieki zdrowotnej opiera się na zasadzie wolnorynkowej. Każda jednostka płaci za potrzebną jej opiekę zdrowotną albo bezpośrednio, albo za pośrednictwem prywatnego ubezpieczenia zdrowotnego. Nikt nie ma moralnego prawa do opieki zdrowotnej i społeczność nie ma obowiązku redystrybucji własności (bogactwa) w celu zapewnienia świadczeń w związku z potrzebami medycznymi osób pokrzywdzonych przez los (por. [2]).

W publicznej opiece zdrowotnej stanowisko liberalne objawia się jako zorientowana na jednostkę interpretacja niezbędnej opieki. Każda jednostka sama określa, jakiej opieki zdrowotnej potrzebuje. Postrzegana indywidualna potrzeba medyczna jest ogniskową opieki zdrowotnej i w zasadzie wszystkie świadczenia, niezbędne z punktu widzenia tego indywidualnego zapotrzebowania na opiekę zdrowotną, muszą być osiągalne w przestrzeni społecznej (por. [2]). Ważny jest wykluczający aspekt takiej interpretacji – w istocie wyklucza się przymus leczenia, z wyjątkiem przypadków powodowania zagrożenia zdrowia innych. Liberalna zasada stanowienia priorytetów mówi, że należy zapewniać takie świadczenia opieki zdrowotnej, które dotyczą schorzeń niekorzystnie wpływających na niezależne funkcjonowanie jednostki i ograniczających możliwości osiągnięcia przez jednostkę jej celów życiowych.

Podstawą egalitaryzmu jest idea równości istot ludzkich i tworzenia im możliwości stawania się jak najbardziej równymi innym. Równość ze względu na opiekę zdrowotną oznacza dążenie do wielu celów: równego stanu zdrowia wszystkich, równie dobrego samopoczucia wszystkich, porównywalnego korzystania ze świadczeń opieki zdrowotnej przez jednostki o porównywalnych potrzebach medycznych, równego dostępu do świadczeń opieki zdrowotnej (por. [2]). Jednak tworzenie równych szans, w ramach których jednostki dokonują własnych wyborów, egalitaryzm uznaje za niewystarczające. Oznacza to bowiem ignorowanie faktu, że jednostki nie są równe ze względu na swe możliwości wykorzystania szans.

Stanowisko egalitarne utrzymuje, że grupy upośledzone społecznie i ekonomicznie, osoby przewlekłe chore i osoby niepełnosprawne znajdują się w niekorzystnej sytuacji ze względu na równość szans. Ich sytuacja często uniemożliwia im nawet dostrzeżenie tego, że potrzebują opieki zdrowotnej. Stąd istotnym aspektem jest tu rozumienie potrzeby medycznej jako potrzeby określonej obiektywnie i wspólnie, a nie tylko postrzeganej indywidualnie (por. [2]). Należy zatem zapewnić grupom upośledzonym dodatkową opiekę zdrowotną tak, aby miały należny udział w normalnej gamie możliwości dostępnych w społeczeństwie. Najważniejsze zatem jest ujawnienie jednostek o najgorszym stanie zdrowia, ocena dotkliwości schorzeń lub związanej z nimi jakości życia.

Dla utilitaryzmu centralną kategorią jest użyteczność, która obejmuje takie pojęcia, jak: przyjemność, zadowolenie, szczęście, dobrostan, brak bólu, dobre zdrowie czy zdolność osiągania celów w życiu. Sprawiedliwość dystrybucyjna rozumiana jest tu jako zmiana użyteczności w wyniku jakiegoś działania czy decyzji. Działanie lub decyzja są słuszne, jeśli maksymalizują łączną użyteczność interpretowaną zwykle jako suma doznawanych użyteczności indywidualnych. W obszarze opieki zdrowotnej owa łączna użyteczność jest pojmowana jako ogólne zdrowie ludności (por. [2]). Użyteczność poszczególnego świadczenia

opieki zdrowotnej musi być udowodniona empirycznie. Mierzy się ją uzyskanymi latami życia zazwyczaj korygowanymi ze względu na jakość życia, tzw. przyrostem zdrowia. Im większy jest stosunek przyrostu zdrowia uzyskanego dzięki świadczeniu do kosztu świadczenia, tym wyższy jest priorytet tego świadczenia. Z punktu widzenia utilitaryzmu, stanowienie priorytetów w opiece zdrowotnej polega na ustaleniu skuteczności świadczeń i ich efektywności kosztowej (por. [2]).

Obok powyższych trzech głównych stanowisk wyróżnia się jeszcze czwarte – tzw. stanowisko wspólnotowe (komunitarianizm). Potrzeba opieki zdrowotnej jest określana przez to, co dana wspólnota uważa za niezbędną opiekę. Treść takiej opieki jest zdeterminowana przez wartości i standardy konstytuujące tożsamość wspólnoty. Normalne funkcjonowanie społeczne, czyli zgodne z tymi wartościami i standardami, wyznacza zakres opieki niezbędnej jednostce do tego, by być członkiem określonej wspólnoty (por. [2]). Z uwagi na fakt, że różne wspólnoty opierają się na różnych wartościach i standardach, tak rozumiana niezbędna opieka prowadzi do wyboru różnych świadczeń zapewniających normalne społeczne funkcjonowanie. Komunitarianizm w opiece zdrowotnej ujawnia, że stanowienie priorytetów jest uwarunkowane kulturowo i nie można decydować o sprawiedliwej alokacji opieki zdrowotnej bez jednoczesnego odwołania do odpowiedniego podłoża normatywnego określonej społeczności, co wymaga ustawicznej debaty na temat wartości ważnych dla tej społeczności.

#### 4. Cele podstawowego koszyka

Bezstronność proceduralna w publicznej opiece zdrowotnej prowadzi do poszukiwania takich propozycji racjonowania, które umożliwiają określony kompromis pomiędzy odmiennymi stanowiskami normatywnymi. Kompromis taki często przyjmuje formę wytycznych, w których formułuje się kryteria i zasady stanowienia priorytetów w opiece zdrowotnej w ogóle i w poszczególnych jej obszarach. Jednak wraz z narastaniem trudności w pokrywaniu kosztów technologicznego postępu w opiece zdrowotnej taka forma sprawiedliwości dystrybtywnej jest kontestowana. Te same wytyczne często bowiem wiodą do odmiennych decyzji alokacyjnych. Dzieje się tak dlatego, że sprzeczności pomiędzy stanowiskami normatywnymi kryjące się wewnątrz wytycznych są w kolejnych kontekstach technologicznych i kosztowych interpretowane inaczej. Powstaje coraz silniejsze wrażenie, że decyzje alokacyjne nie są konsekwentne.

Przekonanie o braku konsekwencji w stosowaniu wytycznych podważa zaufanie do merytoryczności decyzji, a tym samym do bezstronności priorytetów. Bezstronność proceduralna nie zapewnia już sprawiedliwości dystrybtywnej.



Zasady bezstronności muszą zostać rozszerzone poza sam proces podejmowania decyzji – na wynik decyzji. Oznacza to konieczność podania do publicznej wiadomości przede wszystkim wykazu świadczeń zapewnianych w publicznej opiece zdrowotnej oraz opisu ich poziomu technologicznego. Jawne racjonowanie przybiera nową formę – formę tzw. koszyka podstawowych świadczeń zdrowotnych gwarantowanych w publicznej opiece zdrowotnej.

W latach 90. koncepcja podstawowego koszyka pojawiła się w wielu różnych propozycjach reform opieki zdrowotnej. Zwykle uznawano go za prawie uniwersalny lek na liczne dolegliwości systemu zdrowotnego. Okazuje się również, że mimo różnic w kompromisach normatywnych, koszyki podstawowe w różnych krajach są zasadniczo podobne, jeśli chodzi o główną strukturę świadczeń. Koszyk podstawowy jest wykorzystywany w różnych celach nie tylko jako narzędzie racjonowania, lecz również regulacji. Można wyróżnić następujące cele koszyka podstawowych świadczeń zdrowotnych (por. [6]):

1. ochrona ubezpieczeniowa przed katastrofalnymi skutkami chorób,
2. przepływ funduszy z uwzględnieniem poziomu ryzyka choroby,
3. wzrost efektywności alokacyjnej wydatków opieki zdrowotnej,
4. ograniczenie przypadków nadmiernego ciężaru choroby,
5. zwiększenie sprawiedliwości w dostępie do opieki zdrowotnej,
6. kontrola wzrostu kosztów opieki zdrowotnej,
7. pobudzanie konkurencji między ubezpieczycielami,
8. ułatwienie publicznego udziału w racjonowaniu opieki zdrowotnej.

Ad. 1. W przypadku chorób stosunkowo rzadkich i wymagających wysokich nakładów na ich leczenie, niewiele osób jest w stanie sprostać finansowym problemom, wykorzystując posiadane dochody i oszczędności. Niskie prawdopodobieństwo zachorowania ma ten skutek, że poszczególna jednostka nie dostrzega osobistego ryzyka i zwykle wszyscy zrezygnowaliby z ochrony ubezpieczeniowej w tym zakresie (por. [6]). W takich sytuacjach władze publiczne mogą interweniować w celu wprowadzenia publicznej ochrony przed katastrofalnymi skutkami chorób. Rozłożenie kosztów między wszystkie jednostki znakomicie zmniejsza jednostkowe obciążenie finansowe związane z ochroną. Koszyk realizujący ten cel musi gwarantować zatem w pierwszym rzędzie opiekę zdrowotną w przypadku chorób dotkliwych i/lub wymagających niezwłocznego leczenia, i/lub których leczenie jest kosztowne.

Ad. 2. Wiele chorób koncentruje się w określonych grupach ludzi (grupach wysokiego ryzyka). Osoby niskiego ryzyka będą unikać ochrony ubezpieczeniowej w przypadku takich chorób. Powszechne ubezpieczenie zdrowotne służy ograniczaniu takiej negatywnej selekcji. W zamian za obecne transfery finansujące ochronę osób chorych, osoby zdrowe mają domyślną gwarancję wzajemno-

ści wtedy, kiedy one będą chore. Ubezpieczyciele mogą zaoferować jednak polisy odpowiadające grupom o różnym poziomie ryzyka ze składką tym wyższą, im wyższe jest ryzyko. Taka separacja ryzyka prowadzi do minimalizacji transferów. Niezbędna okazuje się państwowa regulacja zakresu ochrony oferowanej przez ubezpieczycieli. Jeśli choroby dotykające w przeważającej mierze grupy podwyższonego ryzyka zostaną włączone do koszyka podstawowych świadczeń, to grupy niskiego ryzyka są zmuszone do transferów na korzyść grup wysokiego ryzyka i stawki ubezpieczeniowe są oparte na łączeniu ryzyka przynajmniej w zakresie świadczeń podstawowych (por. [6]). Koszyk o takim ukierunkowaniu obejmowałby głównie choroby skoncentrowane w łatwo rozpoznawalnych grupach wysokiego ryzyka.

Ad. 3. Opiekę zdrowotną można w pewnej perspektywie postrzegać jako proces produkcji, w którym produktem jest poprawa stanu zdrowia, a technikami są procedury leczenia. Procedury leczenia określonej choroby różnią się ze względu na efekt zdrowotny i koszt oraz efektywność kosztową (stosunek efektu do kosztu). Jeszcze większe jest zróżnicowanie w tym względzie procedur leczenia różnych chorób. Jest tak niezależnie od tego, jak rozstrzyga się wątpliwości metodologiczne i etyczne związane z pomiarem efektów zdrowotnych oraz ich odniesieniem do kosztów. Ponieważ w dowolnym okresie wielkość funduszy pozwalających na finansowanie procedur medycznych jest ustalona, to pojawia się kwestia optymalizacji wykorzystania procedur w opiece zdrowotnej. Odpowiednie przesunięcie środków z procedur o niższej efektywności kosztowej na rzecz procedur o wyższej efektywności kosztowej przyniesie poprawę łącznego zdrowia interpretowanego w kategoriach wynegocjowanego kompromisu etycznego. Jeśli w koszyku podstawowym ustali się większy zakres finansowania procedur efektywniejszych i wykluczy się procedury najmniej efektywne, to poprawi się efektywność alokacji wydatków opieki zdrowotnej (por. [6]).

Ad. 4. Ciężar choroby oznacza pogorszenie łącznego zdrowia ludności spowodowane nieodwracalnymi skutkami choroby w postaci niepełnosprawności lub przedwczesnej śmiertelności (por. [9]). Procedury medyczne często charakteryzują się wysokimi kosztami początkowymi. Ich stosowanie może być usprawiedliwione tym, że owe koszty rozkładają się na wielu potencjalnych pacjentów zagrożonych śmiercią lub upośledzeniem, czyli na duży zagregowany ciężar choroby. Niektóre procedury mają również silny pozytywny efekt zewnętrzny, jak w przypadku procedur leczenia chorób zakaźnych. Nie wystarczy wtedy brać pod uwagę tylko poprawy zdrowia leczonego pacjenta, lecz należy uwzględnić również efekt zdrowotny u tych osób, które zostałyby zarażone (por. [6]). Ograniczenie ciężaru chorób jako cel koszyka podstawowego sprzyja uwzględnianiu przede wszystkim chorób masowych często prowadzących do śmierci lub znacznego upośledzenia.

Ad. 5. Różnice w dostępie do opieki zdrowotnej związane z wielkością dochodów pacjentów zwykle obecnie uznaje się za niesprawiedliwe. W publicznej opiece zdrowotnej niesprawiedliwość taka polega zazwyczaj na obniżaniu technologicznego poziomu leczenia chorób dotyczących grup niezamożnych, co umożliwiają niższe oczekiwania zdrowotne członków tych grup. Wprowadzenie koszyka podstawowego oznacza ustalenie publicznych wzorców opieki. Dowody wskazujące, że jedni pacjenci nie mają dostępu do niezbędnego leczenia, podczas gdy inni korzystają z leczenia nie-niezbędnego, stają się wtedy trudne do zakwestionowania przez ubezpieczycieli i dostawców (por. [6]).

Ad. 6. Historycznie, pierwotny cel koszyka podstawowego polegał na kontroli wzrostu kosztów opieki zdrowotnej dzięki wykluczeniu bardziej uznaniowych typów opieki, charakteryzujących się szczególną podatnością na pokusę moralną, której ulegają zarówno dostawcy, jak i pacjenci. Uznaniowość ta objawia się niezwykle różnicami wykorzystania zasobów przez lekarzy, bez oczywistych różnic w potrzebach medycznych pacjentów (por. [6]). Włączenie do koszyka podstawowego przede wszystkim precyzyjnie określonych procedur ogranicza pokusę moralną pojawiającą się wtedy, kiedy procedura jest wskazana ogólnie i wszelkie szczegóły pozostawia się decyzjom lekarza, które tylko w wyjątkowych przypadkach podlegają wszechstronnej ocenie z punktu widzenia sztuki medycznej. Koszyk podstawowy prowadzi tym samym do ograniczenia wzrostu kosztów opieki zdrowotnej dzięki ograniczeniu nadmiernego zużycia zasobów.

Ad. 7. Ustanowienie koszyka podstawowego zmusza większość ubezpieczycieli do zaferowania takiego koszyka jako jednego ze swych produktów. Merytoryczna jednolitość takich produktów umożliwia porównanie kosztów (cen) (por. [6]). Jeśli ponadto oferowanie tego typu produktu staje się warunkiem autoryzacji ubezpieczycieli, to ustanowienie koszyka podstawowego sprzyja uczciwej konkurencji w sektorze ubezpieczeń zdrowotnych. W przeciwnym przypadku ubezpieczyciele, w celu otrzymania autoryzacji, usiłowałiby oferować coraz uboższe produkty za coraz niższą składkę.

Ad. 8. Stanowienie koszyka podstawowego jest fundamentem publicznej debaty dotyczącej alokacji zasobów w publicznej opiece zdrowotnej. Jeśli członkowie społeczeństwa w takiej lub innej formie finansują taką opiekę, to prędzej czy później domagają się wyraźnego opisu tego, co opieka owa zapewnia (por. [6]). Znaczna część racjonowania była dawniej ukryta za zasłoną klinicznych decyzji podejmowanych przez lekarzy i milcząco akceptowana wskutek braku publicznej ogłady medycznej. Obecnie publiczna świadomość rośnie tak szybko, jak niechęć lekarzy do przyjmowania roli podmiotu racjonującego. Debata na temat struktury koszyka podstawowego przynosi znaczne korzyści

z punktu widzenia spójności społecznej i świadomości społeczeństwa o koniecznych wyborach w opiece zdrowotnej.

Jest oczywiste, że poszczególny koszyk nie może służyć osiągnięciu wszystkich powyższych celów. Tym bardziej, że występuje konflikt między poszczególnymi celami. Bardzo pożyteczne jest z tego punktu widzenia odniesienie celów do podstawowych stanowisk etycznych. Otóż efektywność kosztowa, ciężar choroby i eliminacja pokusy moralnej wpisują się wyraźnie w ramy utilitaryzmu (poprawa efektywności świadczeń). Natomiast łączenie ryzyka, sprawiedliwy dostęp i ochrona przed katastrofami wydają się być zakorzenione w egalitaryzmie (unikanie ryzyka świadczeń). Konflikt między wzrostem efektywności a unikaniem ryzyka był rozpoznany już w najwcześniejszych próbach stanowienia priorytetów (por. [6]). Początkowo większość realizacji idei podstawowego koszyka była ukierunkowana na świadome racjonowanie rzadkich funduszy publicznych. Rozpoczynano od celów zdecydowanej poprawy efektywności. Jednak w wyniku publicznego, politycznego i profesjonalnego nacisku często kończono na uwzględnianiu celów unikania ryzyka. Można obecnie zauważyć, że w krajach wysoko rozwiniętych umacnia się ukierunkowanie koszyka na unikanie ryzyka, natomiast w krajach rozwijających się nadal występuje tendencja wykorzystywania koszyka do poprawy efektywności (por. [6]).

## 5. Konkurencja regulowana

Propozycje koszyka podstawowych świadczeń medycznych są elementem szerszego procesu zmian zachodzących w opiece zdrowotnej. Chodzi o rynkową reformę opieki zdrowotnej. W większości przypadków reforma taka jest zazwyczaj kolejnym etapem rozwoju współczesnego systemu finansowania i organizacji opieki zdrowotnej. Pierwszy etap tego rozwoju polega na usunięciu przede wszystkim finansowych barier w dostępie do opieki zdrowotnej. Celem etapu drugiego jest kontrola wywołanego w poprzednim etapie wzrostu wydatków na opiekę zdrowotną. Natomiast w trzecim etapie chodzi o poprawę efektywności tworzenia i korzystania ze świadczeń zdrowotnych w ramach wymogów sprawiedliwego dostępu i powstrzymywania wzrostu całkowitych wydatków opieki zdrowotnej (por. [7]).

Rynkowe reformy opieki zdrowotnej opierane są na regulowanej konkurencji. Polega ona na alokacji zasobów i ustalaniu cen poprzez określone kontrakty zawierane pomiędzy pacjentami, dostawcami, ubezpieczycielami, obywatelami i państwem, ale w ramach ustanowionych przez państwo reguł wynikających z kompromisu etycznego. Kluczowym elementem tych reguł jest właśnie koszyk podstawowych świadczeń medycznych. Powszechnie przy tym uważa się regu-

lowaną konkurencję za substytut szczegółowych regulacji rządowych w zakresie cen, efektów i wolumenu świadczeń w celu powstrzymania wzrostu kosztów opieki. Oczekuje się stabilizacji tej części produktu krajowego brutto, która jest wydatkowana na opiekę zdrowotną (por. [7]).

Problem polega na tym, że takie oczekiwania nie są zgodne z wnioskami wynikającymi z ekonomicznej analizy opieki zdrowotnej. Dzięki powszechnemu ubezpieczeniu zdrowotnemu każdy w zasadzie obywatel ma dostęp do szerokiego koszyka świadczeń opieki zdrowotnej w ramach solidarności między osobami bogatymi i ubogimi, młodszymi i starszymi, zdrowymi i chorymi. Regulowana konkurencja prowadzi do kształtowania się realnych cen świadczeń zdrowotnych. Jeśli jednak dodatkowe świadczenie medyczne przyniesie poprawę czyjegoś zdrowia i regulowana konkurencja to świadczenie odpowiednio wyceni, a przy tym większość członków społeczeństwa uznaje dobre zdrowie za najważniejszą rzecz w życiu, to nie można wykluczyć tego, że ostatecznym rezultatem będzie jednocześnie większa efektywność świadczeń (niższy koszt porównywalnego efektu zdrowotnego) i większe całkowite koszty świadczeń (świadczenia o wyższej jakości i większy wolumen świadczeń) (por. [7]). Takie skutki ujawniają się zresztą w wielu innych obszarach, ale nie pojawia się niepokój z powodu rosnących wydatków społeczeństwa na przykład na samochody czy wakacje.

Natomiast obawa przed wzrostem kosztów opieki zdrowotnej narasta pomimo tego, że struktura tej opieki dostosowuje się do preferencji pacjentów. Obawa jest tak duża, że rządy posuwają się do ustalenia pułapu całkowitych wydatków opieki zdrowotnej i w konsekwencji maksymalnej składki ubezpieczenia zdrowotnego. Przyczyną tego zjawiska jest publiczna odpowiedzialność za zapewnienie dostępu do opieki zdrowotnej dla każdego. Dostęp do opieki dla osób chorych i ubogich implikuje przepływ środków od osób zdrowych i zamożnych. Składka jest bowiem zależna od dochodu, nie od stanu zdrowia. Obecny charakter postępu medycznego powoduje, że dla tej samej choroby istnieje wiele procedur różniących się nieznacznie efektem zdrowotnym, ale bardzo znacznie kosztami związanymi z diagnostyką, nieinwazyjnością, komfortem leczenia. Przyzwoite minimum dla każdego ustala się na coraz to wyższym poziomie, ponieważ wszyscy, mając prawo do równego dostępu do opieki, mają równe prawo do korzystania z rezultatów postępu medycznego. Przeciętna składka pozwala jednak na sfinansowanie powszechnego dostępu do przeciętnej technologii leczenia. Natomiast sprawiedliwy dostęp oznacza społeczną presję na powszechny dostęp do najwyższej technologii leczenia, co wymaga ponadprzeciętnej składki. Narasta sprzeczność między postępowaniem nauki medycznej i sprawiedliwą dystrybucją ich osiągnięć (por. [1]). W obawie o niekorzystny wpływ tego mechanizmu na wzrost gospodarczy rządy ustanawiają więc górną granicę publicznych wydatków na opiekę zdrowotną (por. [7]).

Stabilizacja wydatków na opiekę zdrowotną nie zatrzymuje jednak kapitałochłonnego i pracochłonnego postępu medycznego. Pojawia się coraz więcej, coraz kosztowniejszych procedur. Uwzględniając ograniczenie wydatków publicznej opieki zdrowotnej, konieczne w przypadku subsydiowania osób chorych i ubogich, rozstrzygającym pytaniem jest pytanie o to, jakie procedury powinny się udostępniać w ramach powszechnego ubezpieczenia zdrowotnego i czy należy każdemu gwarantować dostęp do wszelkiej opieki przynoszącej jakąkolwiek poprawę zdrowia niezależnie od kosztów? Pytania te w ogólnej perspektywie są retoryczne. Pułap wydatków, tak czy inaczej, poprzez ukryte racjonowanie wyklucza powszechny dostęp do wszelkiej opieki zdrowotnej. Ustanowienie koszyka podstawowego umożliwia natomiast określenie powszechnego dostępu, ale do procedur niezbędnych. Zwykle pierwszym krokiem jest wyłączenie z powszechnego ubezpieczenia zdrowotnego tych procedur, w przypadku których koszty są znaczne i oczekiwane efekty zdrowotne niewielkie. Poza ubezpieczeniem pozostawia się więc opiekę w sposób oczywisty kosztowo nieefektywną, opiekę o znikomej skuteczności leczniczej (por. [7]).

Tylko w odosobnionych przypadkach w świecie posunięto się konsekwentnie dalej i przyjęto wyraźne kryterium progu efektywności kosztowej w postaci minimalnego poziomu wskaźnika efekt/koszt. Przy zupełnie ogólnych założeniach, dotyczących odnoszenia przez jednostki korzyści z tytułu leczenia i utraty przez jednostki korzyści z powodu zaniechania leczenia, można pokazać, że wszystkie świadczenia o wskaźniku efekt/koszt większym od określonego progu powinny być objęte ubezpieczeniem zdrowotnym. Sam próg przy tym jest zdefiniowany rozmiarami ograniczenia budżetowego opieki zdrowotnej i jest tym niższy, im wyższy jest budżet zdrowia (por. [3]). Wszystkie podmioty uczestniczące w stanowieniu priorytetów określają bardziej lub mniej jawnie pewien przedział progowy, który pozwala ukierunkować szczególnie proces wyłączenia świadczeń z ubezpieczenia powszechnego. Kształtuje się idea świadczenia niewłaściwego (por. [7]).

Okazuje się jednak, że owe ogólne założenia zawierają pewne założenie, które coraz bardziej kłóci się z realiami opieki zdrowotnej zapewnianej w warunkach konkurencji regulowanej. Chodzi o założenie braku możliwości finansowania leczenia przez pacjenta z własnej kieszeni. Przyjęcie takiego założenia oznacza, że choroby nie objęte powszechnym ubezpieczeniem nie są leczone. Jednak postęp medyczny w sytuacji ograniczenia budżetowego w publicznej opiece prowadzi do takiej oto sytuacji, że pojawiają się procedury, które cechują się znacznymi efektami zdrowotnymi i wysokimi kosztami. Efektywność kosztowa takich procedur jest często również niższa od wymaganego progu. Jeśli jednak ich efektywność kosztowa jest powyżej progu, to i tak ich całkowity koszt jest na tyle znaczący, że powszechny dostęp do nich prowadziłby do dra-

stycznego ograniczenia finansowania bardzo wielu innych procedur wchodzących w skład koszyka. Procedury takie są więc wyłączone z koszyka podstawowego.

Zaczynają być oferowane jednak przez prywatną opiekę zdrowotną. Konkurencja regulowana oznacza bowiem nie tylko wolność wyboru dla pacjenta i ubezpieczyciela, lecz również wolność wyboru dla dostawcy. Dopóki poza koszykiem podstawowym znajdowały się procedury nieefektywne kosztowo z powodu przede wszystkim nikłego efektu zdrowotnego, dopóty zamożni pacjenci nie byli zainteresowani ich prywatnym zakupem. Jednak kiedy poza koszykiem znalazły się procedury o wyraźnym efekcie zdrowotnym, ale nieefektywne kosztowo z powodu przede wszystkim względnie wysokich kosztów, wtedy pacjenci zamożni okazują zainteresowanie ich zakupem z własnej kieszeni. Konkurencja regulowana umożliwia dostawcom oferowanie tych procedur poza publiczną opieką zdrowotną. Zaczyna się rozwijać prywatna opieka zdrowotna oparta na bezpośredniej odpłatności ze strony pacjentów, a następnie prywatne ubezpieczenia zdrowotne umożliwiające łączenie ryzyka w celu pośredniej odpłatności pacjentów w przypadku niektórych chorób i procedur wyłączonych z koszyka podstawowego.

## 6. Zakup z własnej kieszeni

Ukształtowanie się takiej dwusektorowej opieki zdrowotnej prowadzi do radykalnych zmian w stanowieniu koszyka podstawowego. Możliwość finansowania leczenia z własnej kieszeni oznacza bowiem, że jeśli procedura nie wchodzi w skład koszyka podstawowego, to każda jednostka ma jeszcze wybór między zakupem leczenia i zaniechaniem leczenia. Prowadzi to do złożonego układu jednoczesnego odnoszenia korzyści i utraty korzyści (por. [3]):

1. koszyk podstawowy przynosi korzyść związaną z efektem zdrowotnym;
2. zakup leczenia przynosi korzyść związaną z efektem zdrowotnym;
3. zakup leczenia prowadzi do utraty korzyści z powodu zmniejszenia dochodów z tytułu odpłatności za leczenie;
4. zaniechanie leczenia oznacza utratę korzyści związanej z efektem zdrowotnym, który pojawiłby się dzięki leczeniu.

W nowej sytuacji zatem, korzyści odnoszone przez tych pacjentów, którzy leczą się w ramach koszyka podstawowego, pomniejszone są już nie tylko o korzyści utracone przez tych pacjentów, którzy są zmuszeni do zaniechania leczenia. Są one także modyfikowane przez korzyści netto uzyskane przez tych pacjentów, którzy dokonali zakupu procedur poza koszykiem podstawowym. Wybór opcji zakupu leczenia lub opcji zaniechania leczenia jest przy tym zależny od dochodu pacjenta. Osoby, które mają dochody poniżej pewnego progu do-

chodowego, nie będą się leczyć, jeśli procedura nie jest ujęta w koszyku podstawowym. Natomiast osoby z dochodami powyżej tego progu zakupią procedurę z własnej kieszeni, jeśli nie uwzględnią jej ten koszyk. Wysokość owego progu jest funkcją kosztu procedury i jej efektu zdrowotnego (por. [3]).

Interakcja zachodząca między odnoszeniem korzyści i utratą korzyści prowadzi do następującej konsekwencji: świadczenia bez możliwości zakupu mają wyższy priorytet włączenia do koszyka niż świadczenia z możliwością zakupu. Kiedy bowiem opcja zakupu z własnej kieszeni istnieje, to niektóre zamożne osoby zawsze będą się leczyć niezależnie od tego, czy procedura jest, czy nie jest w koszyku. Dla tych osób korzyść z zaoferowania leczenia w ramach powszechnego ubezpieczenia jest tylko oszczędnością ich osobistego kosztu opłacenia leczenia, który jest niższy od utraconej korzyści w przypadku braku leczenia w ogóle (por. [3]). Wynika z tego, że świadczenia, które można zakupić prywatnie, powinny być włączane do koszyka podstawowego na końcu.

Pojawia się jednak konsekwencja jeszcze poważniejsza. Jeśli koszt leczenia jest wystarczająco mały, to dla wszystkich poziomów dochodu korzyść z leczenia jest większa niż utracona korzyść z powodu zmniejszonego dochodu. Wtedy każdy wybierze leczenie, nawet kiedy nie zostanie ono objęte powszechnym ubezpieczeniem. Jeśli natomiast koszt leczenia jest wystarczająco duży, to dla wszystkich poziomów dochodu korzyść z leczenia jest mniejsza od utraconej korzyści z powodu zmniejszonego dochodu. Nikt wtedy nie wybierze leczenia, kiedy nie jest ono oferowane przez powszechne ubezpieczenie. Natomiast w przedziale między kosztem małym i dużym, bilans korzyści nie jest jednoznaczny. W szczególności w sytuacji, w której procedury mają identyczny efekt zdrowotny, ale różnią się kosztami, bilans ten będzie najwyższy dla procedury o koszcie pośrednim, czyli o przeciętnej efektywności kosztowej (por. [3]). Pojawia się niezwykle istotna konsekwencja: nie można już, w przypadku istnienia możliwości zakupu, po prostu szeregować świadczeń według stosunku efekt – koszt.

Absolutny koszt leczenia okazuje się bowiem w takiej sytuacji również czynnikiem samodzielnym. Wynika to z faktu, że im wyższy jest koszt leczenia, tym mniej osób postanowi je finansować z własnej kieszeni, nawet jeśli efekt zdrowotny jest proporcjonalny do kosztu leczenia. Efektywność kosztowa przestaje mieć samodzielne znaczenie, jej znaczenie zależy od liczby osób zmuszonych „do wyboru” zaniechania leczenia. Ma to szczególną wagę w chorobach, w przypadku których pewne osoby postanowiłyby nie leczyć się wtedy, kiedy powszechne ubezpieczenie nie obejmuje ich leczenia. W takich sytuacjach priorytet włączenia świadczenia do koszyka powinien być tym wyższy, im wyższy jest jego absolutny koszt (przy danym poziomie efekt/koszt), gdyż minimalizuje się wtedy utratę korzyści, która byłaby spowodowana zmniejszeniem dochodów. W praktyce oznacza to, że w przypadku świadczeń o podobnych wskaźnikach



efekt/koszt i bliskich progowi efektywności kosztowej ubezpieczenie powszechne powinno pokrywać świadczenia o dużych kosztach. Natomiast świadczenia wystarczająco tanie nie powinny być uwzględniane w koszyku podstawowym, ich realizacja może być finansowana prywatnie (por. [3]).

Uzależnienie stanowienia priorytetów od interakcji zachodzących między efektami zdrowotnymi, kosztami oraz efektami dochodowymi prowadzi do tego, że problem poziomu budżetu opieki zdrowotnej staje się problemem wewnętrznym stanowienia tych priorytetów. Priorytety są nie tylko ustalane w ramach wcześniej ustanowionego ograniczenia zasobów, lecz poziom owego ograniczenia zależy od wyboru priorytetów. W jaki sposób?

Otóż, w przypadku braku możliwości zakupu leczenia, poziom budżetu publicznej opieki zdrowotnej wynika z następującego procesu włączania poszczególnych procedur: procedura jest włączona do koszyka wtedy, kiedy korzyść związana z efektem zdrowotnym procedury jest większa, niż przeciętna korzyść utracona z powodu zmniejszenia dochodów w związku ze zwiększeniem składki ubezpieczeniowej wskutek rozszerzenia ubezpieczenia na tę procedurę (por. [3]). Budżet zdrowia powinien być tak wysoki, by uwzględnić wszystkie procedury, w przypadku których korzyść efektu zdrowotnego przewyższa przeciętną niekorzyść efektu dochodowego.

Jednak przeciętna niekorzyść efektu dochodowego jest większa w przypadku istnienia możliwości zakupu procedury, niż w przypadku braku takiej możliwości. Jest tak z dwu powodów. Po pierwsze, w przypadku możliwości zakupu niekorzyść będzie określana względem mniejszego dochodu przeciętnego (mniejszego wskutek prywatnych zakupów dokonanych przez niektóre osoby). Po drugie, niekorzyść z powodu takiego samego zmniejszenia dochodu jest tym większa, im niższy jest wyjściowy poziom dochodu. Tym samym, aby procedura została w sytuacji zakupu włączona do koszyka, korzyść efektu zdrowotnego musi przewyższać zwiększoną (w porównaniu do przypadku braku zakupu) niekorzyść efektu dochodowego. W konsekwencji mniej procedur zostanie włączonych do koszyka podstawowego w sytuacji istnienia możliwości zakupu z własnej kieszeni. Koszt publicznej opieki zdrowotnej jest więc mniejszy wtedy, kiedy leczenie jest dostępne za odpłatnością, niż wtedy, kiedy takiej możliwości nie ma. Powyższe związki wskazują, że procedura dostępna za odpłatnością nie powinna być włączana do koszyka podstawowego bez względu na jej efektywność kosztową, jeśli jej koszt jest wystarczająco niski (por. [3]).

## 7. Procedura stanowienia priorytetów

Konsekwencją powyższych uwarunkowań jest to, że procedura podejmowania decyzji dotyczących stanowienia priorytetów w opiece zdrowotnej musi składać się z wielu faz. Nie można już ograniczać jej do dwu klasycznych faz. Pierwszej, która polega na jawnej ocenie dotkliwości chorób, ciężaru chorób i stopnia upośledzenia normalnej jakości życia z powodu poszczególnych chorób. Drugiej, która dotyczy oceny skuteczności i efektywności kosztowej procedur leczących choroby włączonych do koszyka podstawowego w pierwszej fazie. Konieczne są przynajmniej jeszcze dwie dodatkowe fazy. Faza trzecia, w której dokonuje się kompensacji ocen ciężaru choroby z jednej strony i ocen skuteczności oraz efektywności kosztowej procedur z drugiej strony. Kompensacja ta jest szczególnie ważna w przypadkach bliskich ustalonych progów. Czwarta faza obejmująca decyzje odnośnie odpłatności za świadczenia zdrowotne (por. [2]).

### Faza 1: Wybór chorób

Wybór chorób jest fundamentem włączania świadczeń zdrowotnych do koszyka podstawowego. Ocena dotkliwości choroby dla pacjenta i ocena ciężaru choroby dla społeczeństwa są tu rozstrzygające. Oceny te są oczywiście uwikłane w spór między głównymi stanowiskami w kwestii sprawiedliwości dystrybtywnej. Pojawiają się tu różne perspektywy: zapewnienie opieki zdrowotnej pacjentom w najgorszym stanie zdrowia, umożliwienie normalnego społecznego funkcjonowania lub normalnego indywidualnego funkcjonowania, utrzymanie zdolności kształtowania własnego planu życia, zapewnienie opieki efektywnej. Selekcja chorób wymaga jasnego ustalenia tego, które stanowisko ma w danym okresie większą wagę.

Jasność ta jest związana z referencyjnymi standardami normalności i anomalii. Z uwagi na nieuchronną normatywną kontrowersyjność takich standardów powinny mieć one charakter nie absolutnego progu, lecz raczej przedziału progowego (por. [2]). Ułatwia to zmniejszanie rozbieżności. Chodzi o to, że w przypadku wielu chorób nie ma potrzeby szerszej dyskusji, gdyż plasują się one wyraźnie powyżej progu. Natomiast dyskusja staje się bardzo trudna w przypadku chorób w pobliżu progu. Rozmycie progu dotkliwości czy ciężaru choroby pozwala na odsunięcie decyzji dotyczących chorób okołoprogowych do kolejnych faz, w których mogą ujawnić się wyjątkowe przypadki zasługujące na uwzględnienie.

## Faza 2: Selekcja świadczeń

Podstawą selekcji świadczeń jest głównie ocena ich skuteczności, która związana jest z rozwojem medycyny opartej na dowodach. Umożliwia ona dokonanie porównań skuteczności procedur w ramach tej samej choroby. Problem natomiast pojawia się wtedy, kiedy staje się przed wyborem między skuteczną procedurą leczącą chorobę małej grupy pacjentów i skuteczną procedurą leczącą chorobę dużej grupy pacjentów. W celu dokonania porównań skuteczności świadczeń leczących różne choroby trzeba rozstrzygnąć kwestię definicji porównywalnego przyrostu zdrowotnego (por. [2]). W perspektywie ciężaru choroby przyrost ten ma dwa ogólne aspekty: zwiększenie długości życia i zwiększenie jakości życia. Większa waga pierwszego aspektu oznacza postawienie osób starszych w niekorzystnej sytuacji. Większa waga drugiego aspektu prowadzi do dyskryminacji osób przewlekle chorych. Kontrowersyjność normatywna skuteczności wymaga, aby odpowiednie standardy miały również postać przedziału progowego. Dzięki temu świadczenia zdrowotne o skuteczności mieszczącej się wewnątrz tego przedziału będą rozważone w następnych fazach.

Postęp medyczny prowadzi do pojawienia się szerokiej gamy procedur leczących daną chorobę. Dlatego selekcja świadczeń musi uwzględniać ich efektywność kosztową. Nie ma tutaj większych wątpliwości wtedy, kiedy chodzi o równie skuteczne procedury związane z tą samą chorobą, lecz różniące się kosztami. Natomiast postęp w zakresie ogólnych miar przyrostu zdrowotnego umożliwia rozważanie przypadków bardziej kontrowersyjnych, gdy procedury dotyczą różnych chorób i różnią się nie tylko kosztami, ale także skutecznością. Porównanie efektywności kosztowej pozwala ustalić przedziały progowe, które są podstawą podejmowanych w czwartej fazie decyzji w sprawie odpłatności za leczenie.

## Faza 3: Kompensacja ocen

Oczywiście kompensacja taka nie jest konieczna w dwu ewidentnych przypadkach. Po pierwsze wtedy, kiedy ciężar choroby, skuteczność oraz efektywność kosztowa interwencji medycznej są wyraźnie powyżej odpowiednich progów. Po drugie w przypadku przeciwnym, kiedy są wyraźnie poniżej tych progów.

Jest jednak wiele sytuacji, w których trzeba osiągnąć kompromis z punktu widzenia sprawiedliwości. Chodzi przede wszystkim o niezgodność pozycji względem odpowiednich progów (por. [2]). Na przykład ciężar choroby jest powyżej progu, ale procedura lecząca nie jest wystarczająco skuteczna oraz efektywna kosztowo. Albo też ciężar choroby jest nieco poniżej progu, natomiast procedura jest bardzo skuteczna, lecz niewystarczająco efektywna kosztowo. Właśnie takie niezgodności pozycyjne stanowią o największej trudności procesu

stanowienia priorytetów. Trzeba bowiem zdecydować, czy niedobór względem jednego progu może być kompensowany nadmiarem względem innego progu.

Podjęcie decyzji w tych przypadkach wymaga dużej spójności w interpretacji zdrowia, choroby, normalności czy anomalii. Spójności takiej nie uzyskuje się raz na zawsze. Zwykle trzeba prowadzić prawie w każdym przypadku debatę dotyczącą interpretacji sytuacji z punktu widzenia głównych stanowisk etycznych w aspekcie ciężaru choroby, skuteczności i efektywności procedury. Debaty taka nie musi prowadzić do decyzji całkowitego włączenia lub wyłączenia świadczenia zdrowotnego. Kompromis może bowiem polegać na możliwości częściowej lub pełnej odpłatności ze strony wszystkich lub niektórych grup pacjentów. Konkretnie decyzje w tym zakresie podejmowane są w czwartej fazie.

#### **Faza 4: Odpłatność indywidualna**

Nie należy rozumieć tej fazy jako tylko potwierdzenia decyzji podjętych w poprzednich fazach, czyli ostatecznego uznania, że procedura jest albo finansowana publicznie, albo prywatnie. Zasada przedziału progowego obowiązująca w poprzednich fazach skłania raczej do rozpatrzenia najpierw rozwiązań polegających na współpłaceniu, czyli częściowej odpłatności indywidualnej za świadczenia publicznej opieki zdrowotnej. Jeśli bowiem zakup prywatny okazuje się nieuniknionym zjawiskiem w procesie stanowienia priorytetów w warunkach konkurencji regulowanej, to współpłacenie jako swego rodzaju regulowany publicznie zakup prywatny pozwala osiągnąć kompromisy lepiej dopasowane do specyficznej sytuacji poszczególnych grup pacjentów.

Współpłacenie można uzależnić od ciężaru choroby, skuteczności procedury, efektywności kosztowej procedury, kosztu procedury czy też liczebności zainteresowanej grupy pacjentów (por. [2]). Dzięki elastycznemu powiązaniu korzyści wynikających z efektów zdrowotnych i niekorzyści wynikających z efektów dochodowych można osiągnąć jednoczesne zwiększenie budżetu publicznej opieki zdrowotnej, ograniczenie niewłaściwego korzystania ze świadczeń i zapewnienie opieki większej liczbie osób w najgorszej sytuacji zdrowotnej. Jednak uzyskanie pozytywnego bilansu korzyści i niekorzyści z tytułu współpłacenia wymaga bardzo szczegółowych analiz wielkości wchodzących w grę efektów. W celu kontroli efektów dochodowych ustala się też zwykle maksymalną kwotę współpłacenia ze strony pacjenta.

## **8. Zakończenie**

Koszyk podstawowych świadczeń zdrowotnych zapewnianych przez publiczną opiekę zdrowotną kształtuje się pod wpływem określonych wymogów

związanych z bezstronnością proceduralną, sprawiedliwością dystrybucyjną, poprawą efektywności, unikaniem ryzyka, solidarnością społeczną oraz konkurencją regulowaną. Sieć tych wymogów w warunkach technologicznego charakteru postępu medycznego prowadzi do pojawienia się możliwości prywatnego zakupu świadczeń medycznych opartych na technologii medycznej.

Istnienie prywatnej opieki zdrowotnej zmienia istotnie proces stanowienia priorytetów w publicznej opiece zdrowotnej i strukturę koszyka podstawowego. W szczególności pojawia się interakcja między efektami zdrowotnymi świadczeń, kosztami świadczeń i efektami dochodowymi świadczeń. Interakcja ta powoduje, że do koszyka podstawowego powinny być włączane w pierwszym rzędzie świadczenia o wysokich kosztach, natomiast świadczenia o niskich kosztach nie powinny być w tym koszyku uwzględniane. Efektywność kosztowa świadczenia zdrowotnego ma już tylko względne znaczenie, zależne od liczby osób zmuszonych do zaniechania leczenia.

Konsekwencją tych uwarunkowań jest wielofazowa struktura procedury podejmowania decyzji dotyczących koszyka podstawowych świadczeń. W pierwszej fazie dokonuje się wyboru chorób na podstawie oceny ich dotkliwości i ciężaru. Faza druga dotyczy oceny skuteczności i efektywności kosztowej procedur leczących uprzednio wybrane choroby. Faza trzecia polega na określeniu kompensacji między ocenami uzyskanymi w dwu poprzednich etapach. Faza czwarta obejmuje ustalenia dotyczące odpłatności pacjenta za świadczenia wchodzące w skład koszyka podstawowego.

## Literatura

- [1] Callahan D., *How Much Medical Progress Can We Afford? Equity and the Cost of Health Care*, „Journal of Molecular Biology” 2002, nr 319, ss.885–890, źródło: [www.idealibrary.com](http://www.idealibrary.com)
- [2] Hoedemaekers R., Dekkers W., *Justice and Solidarity in Priority Setting in Health Care*, „Health Care Analysis” 2003, Vol. 11, No. 4, Kluwer Academic Publishers.
- [3] Hoel M., *What should (public) health insurance cover?*, „Journal of Health Economics” 2007, nr 26, ss. 252–262, źródło: [www.elsevier.com/locate/econbase](http://www.elsevier.com/locate/econbase)
- [4] Martin D.K., Giacomini M., Singer P.A., *Fairness, accountability for reasonableness, and the views of priority setting decision-makers*, „Health Policy” 2002, nr 61, ss. 279–290, źródło: [www.elsevier.com/locate/healthpol](http://www.elsevier.com/locate/healthpol)

- 
- [5] Mechanic D., *Muddling Through Elegantly: Finding The Proper Balance In Rationing*, „Health Affairs”, September/October 1997, Volume 16, Number 5, ss. 83–92, The People-to-People Health Foundation, Inc.
- [6] Söderlund N., *Possible objectives and resulting entitlements of essential health care packages*, „Health Policy” 1998, nr 45, ss. 195–208, Elsevier Science Ireland Ltd.
- [7] Van de Ven W.P.M.M., *Regulated competition in health care: With or without a global budget?*, „European Economic Review” 1995, nr 39, ss. 786–794, Elsevier Science B.V.
- [8] Wailoo A., Anand P., *The nature of procedural preferences for health-care rationing decisions*, „Social Science & Medicine” 2005, nr 60, ss. 223–236, źródło: [www.elsevier.com/locate/socscimed](http://www.elsevier.com/locate/socscimed)
- [9] Wiseman V., Money G., *Burden of illness estimates for priority setting: a debate revisited*, „Health Policy” 1998, nr 43, ss. 243–251, Elsevier Science Ireland Ltd.

## Summary

### Determinants of Essential Health Care Package Decisions

The package of essential health care services performed by the public health care has been influenced by many specific determinants. They are a result of the procedural fairness, distributive justice, efficiency improvement, risk avoidance, social solidarity, regulated competition and medical progress. In such a situation, any essential package definition induces an out of pocket option, which has important consequences for the package ranking of services. In particular, for services with the same effect/cost ratios that are all close to the threshold level, the essential package should include services with large costs but not those with small costs. Those last services should be purchased out of pocket. That being so the decision making procedure concerning the essential package must consist at least of the following phases: choice of conditions, selection of services, trade-offs, and individual payment.

Jan Szczepanik

## **Czynniki motywacji pozafinansowej pracowników w przedsiębiorstwach zróżnicowanych pod względem wielkości**

### **1. Wstęp**

Przedmiotem badania są preferencje pracowników dotyczące pozafinansowych czynników motywacyjnych.

Celem pracy jest przedstawienie wyników przeprowadzonego badania preferencji pracowników w polskich przedsiębiorstwach o różnej wielkości, dotyczącego czynników motywacji pozafinansowej. Następnie porównano te preferencje pracowników z efektami motywowania pozafinansowego.

Próba badawcza liczyła 1161 osób. Obejmowała wszystkie szczeble zarządzania i działy, w proporcjach odpowiadających proporcjom zatrudnienia w tych firmach (dobór celowo-losowy). Ankietowani pochodzili z 61 przedsiębiorstw, w tym około 50% z regionów Polski południowej.

Badaniem objęto firmy handlowe, usługowe (m.in. banki, firmy transportowe i dystrybucyjne, informatyczne, energetyczne i turystyczne) oraz produkcyjne (motoryzacja, farmaceutyka, produkcja żywności, wyposażenie techniczne). Badano spółki giełdowe, międzynarodowe korporacje, duże polskie przedsiębiorstwa (w tym kilka państwowych) oraz małe kilkudziesięcioosobowe firmy.

Badanie, nazwane Mapą Motywacji, przeprowadzono w firmie Training Partners prowadzącej szkolenia integracyjne.

### **2. Motywowanie pracowników w przedsiębiorstwie**

Skutecznie zarządzana organizacja rekrutuje pracowników, których kompetencje są istotne z punktu widzenia realizacji celów strategicznych firmy, gdyż to pracownicy przyczyniają się do jej sukcesu i współtworzą jej kulturę organizacyjną. Przedsiębiorstwo motywuje pracowników do działań zgodnych z za-

mierzeniami biznesowymi, wartościami i misją organizacji poprzez różnorodne instrumenty zarządzania. Do narzędzi tych należy zaliczyć między innymi system wynagrodzeń. Skuteczny i efektywny system wynagrodzeń, jako podstawowy element motywacji, tworzony jest z myślą o wykorzystywaniu płac w procesie kształtowania ekonomicznej efektywności działalności przedsiębiorstwa. Ważne są jednak także pozafinansowe czynniki motywacyjne pracowników, będące przedmiotem badania.

Działania pracowników w przedsiębiorstwie, ich dążenie do lepszej pracy, zmian i postępu są zdeterminowane posiadaną przez nich motywacją, która wpływa na procesy wyboru między różnymi zachowaniami i formami aktywności. Motywowanie, jako funkcja zarządzania, zależy zawsze od wielu różnorodnych czynników, które jako zintegrowany układ oddziałują na pracownika, kształtując jego postawy, nastawienie i zachowania w przedsiębiorstwie.

Motywacja jako mechanizm psychologiczny, uruchamiający i organizujący zachowanie człowieka skierowane na osiągnięcie zamierzonego celu, stanowi jego wewnętrzną siłę. Motywacja wpływa głównie na intensywność i trwałość wysiłków zmierzających do osiągnięcia wytyczonego celu. Motywacja do pracy jest wewnętrznym procesem regulującym zachowania ludzi w procesie pracy, wpływającym na ich decyzje dotyczące uruchamiania, ukierunkowywania, podtrzymywania i wygaszania określonych zachowań zmierzających do osiągnięcia celów w sferze aktywności zawodowej.

Aktywność zawodową można rozpatrywać w różnych kontekstach. Jolanta Wilsz proponuje rozpatrywać ją w kontekście stałych indywidualnych cech osobowości pracownika, które pełnią funkcje predyspozycji zawodowych, w kontekście samoregulacji i organizacji, jak również w kontekście mechanizmów interakcji procesów umysłowych i procesów emocjonalnych [7, 8, 9].

Frederick Herzberg prowadził pod koniec lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku badania nad postawami w pracy inżynierów i księgowych (w próbie uczestniczyło 200 pracowników) (por. [4]). Na podstawie zebranych odpowiedzi na pytanie – kiedy pracownicy czuli się dobrze, a kiedy źle w pracy, Herzberg opracował własną teorię motywacji. Należy zwrócić uwagę, że teoria dwuczynnikowa odwołuje się do przedsiębiorstwa. W teorii tej wyróżnić można dwie grupy czynników motywacji: czynniki zewnętrzne i czynniki wewnętrzne.

Czynniki zewnętrzne, zwane inaczej czynnikami niezadowolenia lub higieny (co oznacza czynniki niezbędne, ale niewystarczające dla zachowania równowagi człowieka), odnoszą się do kontekstu pracy tj. środowiska pracy. Dotyczą między innymi stylów zarządzania, polityki przedsiębiorstwa, stosunków międzyludzkich czy warunków pracy i wynagrodzeń. Są to czynniki, które pozwalają likwidować niezadowolenie. Pozytywne oddziaływanie tych czynników nie przynosi, według Herzberga, zadowolenia pracownikowi.



Czynniki wewnętrzne, nazwane czynnikami zadowolenia, odnoszą się do treści pracy. Dotyczą między innymi zainteresowania pracą, osiągnięć, uznania, odpowiedzialności czy możliwości promocji. Czynniki te przyczyniają się do zwiększenia satysfakcji związanej z wykonywaniem pracy, co z kolei prowadzi do wyższej wydajności pracowników. W teorii motywacji Herzberga ważne są kategorie czynników, które decydują o postawach pracowników. Postawy pozytywne można kreować między innymi poprzez zainteresowanie pracą czy też planowanie kariery pracownika. Natomiast postawy negatywne wynikają z niezadowolenia pracownika, na przykład przy zbyt niskim wynagrodzeniu za pracę. Zadowolenie bądź niezadowolenie pracownika są w teorii Herzberga zmiennymi niezależnymi.

Istotne jest więc, jak poprzez zmianę podejścia kadry zarządzającej można zainspirować pracowników, by uzyskać bardziej pozytywne i efektywne zachowanie w przedsiębiorstwie.

Motywacja to bodziec lub zachęta do działania. Jest nią wszystko, co w płaszczyźnie werbalnej, fizycznej czy psychologicznej skłania pracownika do reagowania działaniem.

To, co motywuje pracowników, układa się w pewne wzorce. Ich zrozumienie pozwala poznać motywacje pracowników. Jedną ze znanych teorii, która w szczególności odnosi się do motywowania ludzi, jest hierarchia potrzeb Masłowa. Hierarchia potrzeb Masłowa to teoria stwierdzająca, że ludzie mają wrodzony porządek czy hierarchię rzeczy, których pragną. Kiedy zostanie zaspokojony jeden poziom tej hierarchii, ludzie przechodzą do następnego.

J. Wilsz proponuje rozpatrywać potrzeby pracowników zaspokajane w procesie pracy z punktu widzenia opracowanej przez nią koncepcji potrzeb sterowniczych [10, 11, 12].

Można przykładowo wykorzystać roczne przeglądy osiągnięć pracowników do zbilansowania ich aktualnych potrzeb motywacyjnych. Należy spytać poszczególnych pracowników, czego się spodziewają od pracy. Jeśli znajdziemy pewien wspólny wzorzec potrzeb kilku pracowników, można prowadzić politykę, która jest nakierowana na jego realizację, tak by motywować wszystkich zatrudnionych do bardziej efektywnej pracy i do uzyskania większego z niej zadowolenia.

Takimi wspólnymi motywatorami pozafinansowymi są w szczególności: szacunek, wyzwanie, porządek, atrakcyjne środowisko pracy, elastyczne godziny pracy, a także uczucie przynależności do zespołu, możliwość nieoficjalnego ubierania się, kreatywność, wyjazdy lub brak konieczności wyjazdu, szanse uczenia się. Ważna jest także możliwość awansu, dobra atmosfera, dobry program emerytalny, niezależność w pracy oraz twórcze otoczenie, podziękowania

za dobrą pracę, zaufanie szefa, wiara w sens pracy, czy wreszcie praca z ludźmi i ustalone procedury.

Zrozumienie tego, co motywuje pojedynczych pracowników, pomaga motywować zespoły. Przykładowo pozwolenie pracownikom na wnoszenie wkładu do innowacji w miejscu pracy powoduje, że pracownicy czują się doceniani, zaś pracodawcy uzyskują rozwiązania i produkty, które pozwalają utrzymać czołową pozycję na rynku. Badania wykazały, że płaca o charakterze bodźcowym ma mniejszą siłę motywującą niż proste uznanie czyjegoś wkładu.

Zadaniem każdego menadżera jest osiąganie celów przedsiębiorstwa, także przez wpływanie na zachowania kierowanych przez niego pracowników. Stąd ważną funkcją zarządzania jest dobór i wykorzystanie kapitału ludzkiego dla realizacji zadań i rozwoju przedsiębiorstwa. Dlatego ważnym problemem jest poznanie motywów tkwiących u podstaw zachowań pracowników i zrozumienie oczekiwań względem podejmowanych decyzji.

Metodą analizy sytuacji wewnętrznej firmy są badania postaw pracowników – badania opinii.

Wyniki przedsiębiorstwa w coraz większym stopniu zależą od efektywności zarządzania zasobami ludzkimi. Efektywność tego działania zależy od tego, czy dobrze rozumiemy potrzeby, problemy i motywację oraz sposób myślenia pracowników.

Badanie opinii pracowniczej polega na tym, że duża grupa pracowników jest proszona o wyrażenie zdania na określony temat w anonimowej ankiecie. Dla zapewnienia całkowitej poufności udzielanych odpowiedzi wypełniony kwestionariusz powinien być bezpośrednio przekazany do niezależnej firmy zewnętrznej. Firma ta przetwarza i analizuje dane oraz przygotowuje syntetyczne wyniki wraz z wnioskami i propozycjami zmian.

W polskich przedsiębiorstwach badania opinii pracowników nie są dotychczas zbyt często stosowane. Można jednak zakładać, że stopniowo badania opinii pracowników staną się istotnym narzędziem stosowanym przez specjalistów zarządzających zasobami ludzkimi. Plan zarządzania zasobami ludzkimi powinien obejmować między innymi system motywowania i wynagradzania pracowników.

Badania opinii pracowników pozwalają określić najważniejsze, z punktu widzenia osób badanych, problemy mogące ujemnie wpływać na motywację oraz potencjalne reakcje na wprowadzone zmiany.

### 3. Zastosowana metoda badania opinii pracowników

Badania opinii pracowników zostały przeprowadzone z wykorzystaniem kwestionariusza nastawionego na badanie pozafinansowych czynników motywacyjnych.

Kwestionariusz składa się z dwóch części. W każdej części znajduje się 25 pytań. Pierwsza część wskazuje, jakie i w jakim stopniu (jak bardzo) czynniki motywują pracowników do pracy. Część druga natomiast bada, w jakim stopniu firma, w której pracują osoby badane, zaspokaja ich potrzeby w tym zakresie. Respondent ustosunkowuje się do każdego stwierdzenia, udzielając odpowiedzi na sześciostopniowej skali od „0” do „5”. „0” oznacza, że dane stwierdzenie nie motywuje (w pierwszej części kwestionariusza) bądź firma wcale nie motywuje pracownika, wykorzystując dany obszar motywowania (w drugiej części kwestionariusza). Im wyższa liczba na skali, tym respondent odczuwa większą motywację danym czynnikiem lub firma częściej motywuje pracownika, wykorzystując dany obszar motywowania.

Konstrukcja i wybór odpowiednich stwierdzeń wchodzących w skład kwestionariusza został dokonany dzięki wykorzystaniu metody „sędziów kompetentnych”. Jest to metoda podobna do szeroko rozumianej i stosowanej „burzy mózgów”. Sędziami kompetentnymi byli autorzy publikacji i badań. Podczas tego etapu była wykorzystana wiedza teoretyczna oraz doświadczenie dotyczące motywacji, jej czynników i oddziaływań.

W celu sprawdzenia istotności zaobserwowanych różnic pomiędzy wynikami w dwóch grupach (np. wyróżnionych pod względem stażu pracy) zastosowano test U Manna–Whitneya. W przypadku, kiedy porównywano dwie zmienne w tej samej grupie (np. różnice w wynikach zewnętrznych i wewnętrznych czynników motywacyjnych), zastosowano test kolejności par Wilcoxon (por. [5]). W dalszej części pracy podane są w nawiasach wartości średnich arytmetycznych, oznaczonych jako „ $\bar{X}$ ”, oraz wartość istotności różnic jako „ $p$ ”. Założono, że poziom istotności mniejszy od 0,05 wskazuje na istotne różnice pomiędzy porównywanymi grupami bądź zmiennymi.

W analizach posłużono się także skonstruowaną przez twórców kwestionariusza „różnicą motywacyjną”. Określa ona różnicę w wielkościach średnich pomiędzy tym, jak bardzo respondenta motywuje dane stwierdzenie, a stopniem zaspokojenia danego czynnika motywującego przez przedsiębiorstwo. Im większa rozbieżność pomiędzy oczekiwaniami badanego w zakresie określonego czynnika motywacyjnego a zaspokojeniem go przez przedsiębiorstwo, tym większa wartość różnicy motywacyjnej. W sytuacji, kiedy przedsiębiorstwo bardziej motywuje badanych w zakresie pewnego czynnika motywacyjnego, niż oni tego oczekują, pojawia się ujemna wartość różnicy motywacyjnej. Taki stan

określono stanem „nasylenia” danym czynnikiem. Nie powinno się interpretować ujemnej wartości różnicy motywacyjnej w ten sposób, że należy zaprzestać motywowania danym czynnikiem. Ujemna różnica motywacyjna określa stopień „nasylenia”, ale nie „przesycenia”. Wskazuje, że nie należy poświęcać większej uwagi tym czynnikom, które posiadają ujemne wartości różnic motywacyjnych. Dalsze skupianie się na czynnikach, które posiadają ujemne różnice motywacyjne, nie zwiększy ogólnego poziomu motywacji pracowników. Powinno skupiać się na czynnikach, które posiadają najwyższe wartości różnic motywacyjnych.

Różnica motywacyjna jest liczona według następującego wzoru:

**A – co mnie motywuje,  
B – jak mnie motywuje firma.**

$$\text{Różnica motywacyjna} = A^3 - B^3 \quad (1)$$

Podnoszenie do potęgi trzeciej daje taki efekt, że różnica jest wyższa tam, gdzie wyższe są wyniki A i B, np. różnica między 4 a 3 jest większa niż między 1 a 2.

Celem tak obliczonej różnicy motywacyjnej jest uwypuklenie różnic w tych czynnikach, które są szczególnie ważne dla badanych.

Przyjęto następujące założenie: jeśli jakiś czynnik jest dla badanego ważny, to nawet niewielki jego niedosyt jest dla niego istotny.

Czasem jednak w badaniu różnica jest liczona nie według wzoru (1), lecz jako (2):

$$\text{Różnica motywacyjna} = A - B \quad (2)$$

Jest tak, gdy liczymy ją nie dla pojedynczego czynnika (np. elastyczny czas pracy), ale dla grupy czynników (np. wszystkie czynniki wewnętrzne). Wykorzystano wtedy test U Manna–Whitneya i test kolejności par Wilcozona.

Metoda ta pozwoliła na sprecyzowanie wniosków i na ich podstawie wdrożenie zmian w przedsiębiorstwach.

#### **4. Pozafinansowe czynniki motywacyjne pracowników**

##### **Wewnętrzne czynniki motywacyjne**

Czynniki te zwane są także czynnikami zadowolenia i odnoszą się do treści pracy. Są one związane z cechami oraz własnościami wykonywanej pracy. Dotyczą m.in. zainteresowania pracą, osiągnięć, potrzeb uznania, odpowiedzialności, czy też możliwości promocji. Czynniki te przyczyniają się do zwiększania satysfakcji związanej z wykonywaniem pracy, co z kolei prowadzi do wyższej wydajności pracowników. Prowadzą do długoterminowego wzrostu motywacji pracowników. Lista tych czynników składa się z 13 stwierdzeń ankiety (tabela 1).

Przykładowymi pytaniami kwestionariusza są: „Delegowanie mi zadań, w których mogę pełniej wykorzystać swoją wiedzę”, „Umożliwienie mi udziału w planowaniu moich celów i zadań dla mnie (nienarzucanie mi ich odgórnie)”, „Możliwość przekazywania wiedzy innym”, „Podnoszenie kwalifikacji – np. szkolenia, studia”.

Wewnętrzne czynniki motywacyjne są zbieżne z potrzebami wyższego rzędu „piramidy potrzeb” A. Maslowa oraz z „czynnikami zadowolenia” F. Herzberga.

### Zewnętrzne czynniki motywacyjne

Czynniki te zwane są także czynnikami niezadowolenia. Są to czynniki niezbędne, ale nie wystarczające dla zachowania równowagi człowieka i odnoszą się do kontekstu pracy (środowisko pracy). Dotyczą one m.in. stylu zarządzania, polityki przedsiębiorstwa, stosunków międzyludzkich, czy warunków pracy i wynagrodzeń. Zaspokajają potrzeby bezpieczeństwa, kontaktów społecznych. Lista tych czynników zawierała 12 stwierdzeń kwestionariusza (tabela 2).

Przykładowymi pytaniami kwestionariusza są: „Pakiet świadczeń socjalnych”, „Wysoki standard stanowiska pracy (np. komfortowe biuro)”, „Pewność zatrudnienia”, „Zwolnienie mnie z niektórych niemiłych lub uciążliwych obowiązków”.

Czynniki związane z relacjami z innymi ludźmi, z dobrą atmosferą w miejscu pracy zaklasyfikowane są do zewnętrznych czynników motywacyjnych. Jest to zbieżne z koncepcją dwuczynnikową F. Herzberga, według której wchodzi one w skład czynników niezadowolenia.

**Tabela 1.** Lista wewnętrznych czynników motywacyjnych (n = 13)

Delegowanie zadań
Zapraszanie do udziału w decyzji
Udział w planowaniu własnych celów
Możliwość przekazywania wiedzy
Udział w naradach zarządu
Zmienność bodźców motywacyjnych
Przekazywanie informacji o firmie
Podnoszenie kwalifikacji
Urozmaicenie zadań
Docenianie pracy i sukcesów
Jasno wytyczona ścieżka kariery
Jasno i konkretnie określone cele i zadania
Rozszerzenie kompetencji

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

**Tabela 2.** Lista zewnętrznych czynników motywacyjnych (n = 12)

Pakiet świadczeń socjalnych
Wysoki standard stanowiska pracy
Prestiżowa nazwa stanowiska
Pewność zatrudnienia
Zwolnienie z niemiłych obowiązków
Przewidywalność zdarzeń i sytuacji
Zainteresowanie w kwestiach pozazawodowych
Dobra atmosfera w miejscu pracy
Jawny ranking najlepszych pracowników
Elastyczny czas pracy
Spotkania i wyjazdy integracyjne
Rozliczenie z osiągniętych wyników

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

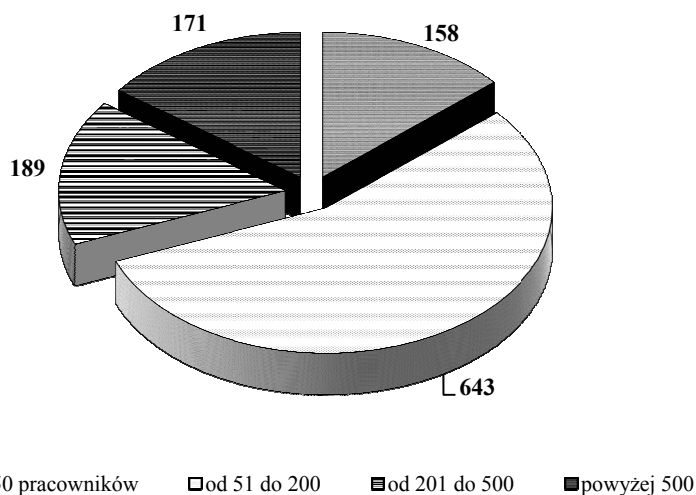
## 5. Analiza i interpretacja wyników badania w przedsiębiorstwach o różnej wielkości

W tabeli 3 i na rysunku 1 przedstawiono wielkości i strukturę zbioru badanych pracowników według kryterium wielkości przedsiębiorstwa.

**Tabela 3.** Charakterystyka badanych ze względu na wielkość przedsiębiorstwa

Wielkość przedsiębiorstwa	Liczba badanych	Procent (%)	Skumulowany procent
do 50 pracowników	158	13,6	13,6
od 51 do 200	643	55,4	69,0
od 201 do 500	189	16,3	85,3
powyżej 500	171	14,7	100,0
Ogółem	1161	100,0	100,0

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.



**Rys. 1.** Struktura badanych pracowników według kryterium wielkości przedsiębiorstwa  
Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

W tabeli 4 przedstawiono wyniki badania czynników motywacyjnych oraz różnicy motywacyjnej w przedsiębiorstwach o różnej wielkości.

**Tabela 4.** Statystyki opisowe czynników motywacyjnych oraz różnicy motywacyjnej według wielkości przedsiębiorstwa

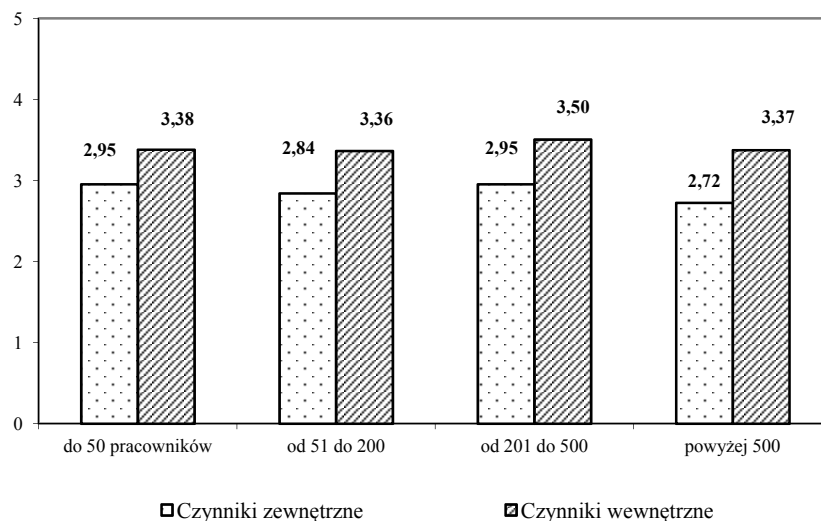
Wielkość przedsiębiorstwa	Pytanie	N	Min.	Max.	Średnia
do 50 pracowników	Co Was motywuje? Czynniki zew.	158	1,42	5,00	2,9536
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki zew.	158	1,92	4,58	3,1366
	Co Was motywuje? Czynniki wew.	158	1,77	5,00	3,3802
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki wew.	158	1,62	4,85	3,0998
	Różnica motywacyjna. Czynniki zew.	158	-2,00	1,75	-,1830
	Różnica motywacyjna. Czynniki wew.	158	-2,31	1,92	-,2804
od 51 do 200	Co Was motywuje? Czynniki zew.	643	1,33	4,67	2,8411
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki zew.	643	1,08	6,25	2,9115
	Co Was motywuje? Czynniki wew.	643	1,85	5,00	3,3642
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki wew.	642	1,08	5,00	2,9796
	Różnica motywacyjna. Czynniki zew.	643	-3,17	2,83	-,0704
	Różnica motywacyjna. Czynniki wew.	642	-1,69	2,92	0,3852
od 201 do 500	Co Was motywuje? Czynniki zew.	189	1,92	4,83	2,9533
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki zew.	189	1,50	5,00	2,8519
	Co Was motywuje? Czynniki wew.	189	2,23	5,00	3,5047
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki wew.	189	1,08	5,00	3,0623
	Różnica motywacyjna. Czynniki zew.	189	-1,42	2,92	0,1014
	Różnica motywacyjna. Czynniki wew.	189	-1,38	3,54	0,4424

Tabela 4. Statystyki opisowe... (cd.)

Wielkość przedsiębiorstwa	Pytanie	N	Min.	Max.	Średnia
powyżej 500	Co Was motywuje? Czynniki zew.	171	0,00	4,67	2,7247
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki zew.	169	0,00	4,50	2,7510
	Co Was motywuje? Czynniki wew.	157	0,00	4,85	3,3743
	Jak motywuje Was Firma? Czynniki wew.	169	0,00	4,54	3,1279
	Różnica motywacyjna. Czynniki zew.	169	-4,00	4,67	0,0212
	Różnica motywacyjna. Czynniki wew.	156	-4,54	4,38	-,2480

Źródło: Opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

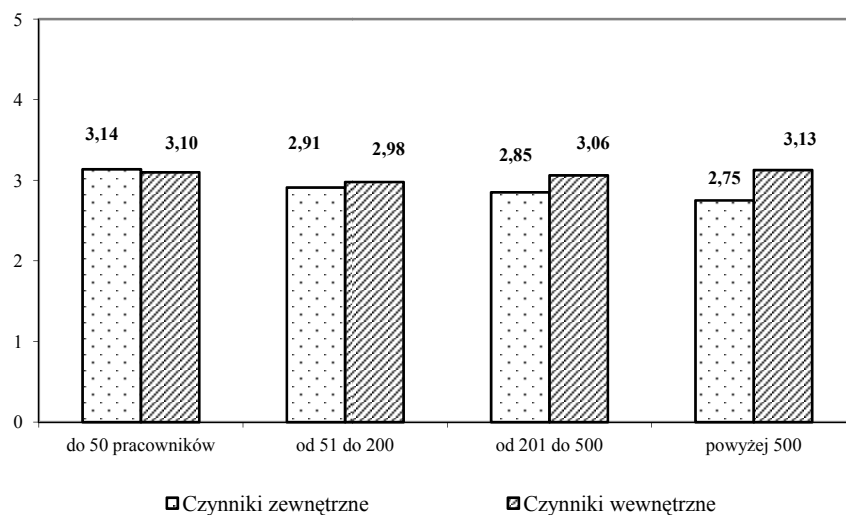
Rysunki 2, 3 i 4 przedstawiają średnie arytmetyczne wartości dla czynników wewnętrznych, czynników zewnętrznych oraz różnicy motywacyjnej, z uwzględnieniem kryterium wielkości przedsiębiorstwa.



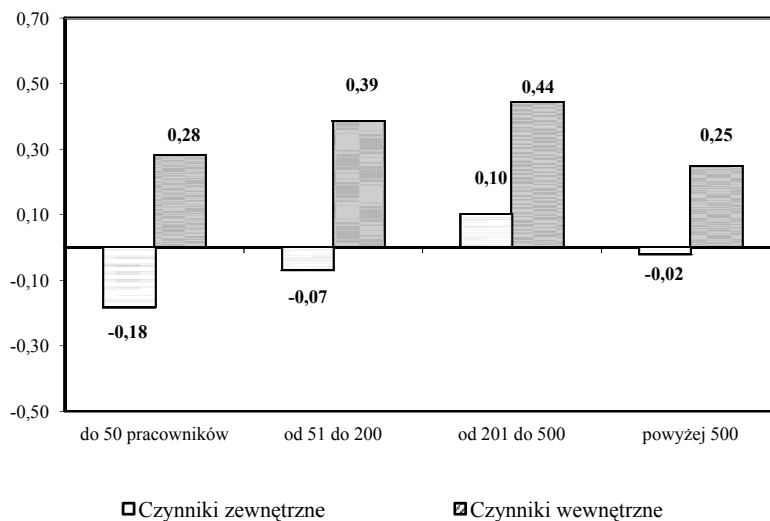
Rys. 2. Wartości średnie czynników motywacyjnych w części „Co Was motywuje”

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.





**Rys. 3.** Wartości średnie czynników motywacyjnych w części „Jak motywuje Was firma”  
 Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.



**Rys. 4.** Wartości średnie różnicy motywacyjnej według wielkości przedsiębiorstwa  
 Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

W tabelach 5 oraz 6 przedstawiono wyniki szczegółowe badania dla pracowników zatrudnionych w średniej wielkości przedsiębiorstwach. Przedsiębior-

stwa te zatrudniają od 51 do 200 pracowników, a liczba badanych pracowników wynosi 643 osoby (to jest 55,4% ogółu badanych).

**Tabela 5.** Co Was motywuje? Wyniki szczegółowe dla pracowników firm zatrudniających od 51 do 200 pracowników (n = 643)

	Średnia
Docenianie pracy i sukcesów	4,5288
Dobra atmosfera w pracy (zew.)	4,3515
Jasno i konkretnie określone cele i zadania	4,1851
Pewność zatrudnienia (zew.)	4,0218
Delegowanie zadań	3,9658
Podnoszenie kwalifikacji	3,9456
Rozszerzenie kompetencji	3,6734
Rozliczanie z osiągniętych wyników (zew.)	3,5739
Udział w planowaniu własnych celów	3,5272
Pakiet świadczeń socjalnych (zew.)	3,3204
Zapraszanie do udziału w decyzji	3,2675
Elastyczny czas pracy (zew.)	3,2613
Jasno wytyczona ścieżka kariery	3,1960
Urozmaicenie zadań	3,0591
Przekazywanie informacji o Firmie	3,0435
Możliwość przekazywania wiedzy	2,7107
Przewidywalność zdarzeń i sytuacji (zew.)	2,6703
Spotkania i wyjazdy integracyjne (zew.)	2,4386
Wysoki standard stanowiska pracy (zew.)	2,4121
Udział w naradach zarządu	2,3717
Zwolnienie z niemiłych obowiązków (zew.)	2,2613
Zmienność bodźców motywacyjnych	2,2597
Prestiżowa nazwa stanowiska (zew.)	2,0622
Jawny ranking najlepszych pracowników (zew.)	1,9191
Zainteresowanie w kwestiach pozazawodowych (zew.)	1,8009

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

**Tabela 6.** Jak Was motywuje Firma? Wyniki szczegółowe dla pracowników firm zatrudniających od 51 do 200 pracowników (n = 643)

	Średnia
Dobra atmosfera w pracy (zew.)	3,9114
Jasno i konkretnie określone cele i zadania	3,8802
Pewność zatrudnienia (zew.)	3,7232
Delegowanie zadań	3,5677
Docenianie pracy i sukcesów	3,4112
Podnoszenie kwalifikacji	3,3826
Spotkania i wyjazdy integracyjne (zew.)	3,3219

**Tabela 6.** Jak Was motywuje Firma?... (cd.)

	<b>Średnia</b>
Urozmaicenie zadań	3,3204
Elastyczny czas pracy (zew.)	3,2846
Pakiet świadczeń socjalnych (zew.)	3,2395
Możliwość przekazywania wiedzy	3,1820
Rozliczanie z osiągniętych wyników (zew.)	3,0933
Przekazywanie informacji o Firmie	3,0311
Wysoki standard stanowiska pracy (zew.)	2,8118
Udział w planowaniu własnych celów	2,7636
Rozszerzenie kompetencji	2,7418
Przewidywalność zdarzeń i sytuacji (zew.)	2,6967
Zapraszanie do udziału w decyzji	2,5599
Zmienność bodźców motywacyjnych	2,4432
Prestiżowa nazwa stanowiska (zew.)	2,3981
Jasno wytyczona ścieżka kariery	2,3888
Zainteresowanie w kwestiach pozazawodowych (zew.)	2,2271
Zwolnienie z niemiłych obowiązków (zew.)	2,1726
Udział w naradach zarządu	2,0638
Jawny ranking najlepszych pracowników (zew.)	2,0575

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

Tabela 5 obejmuje średnie arytmetyczne wyników odpowiedzi na pytania wskazujące, w jakim stopniu (jak bardzo) zdefiniowane czynniki wewnętrzne i zewnętrzne motywują pracowników do pracy. Tabela 6 przedstawia średnie arytmetyczne wyników odpowiedzi na pytania wskazujące, w jakim stopniu przedsiębiorstwo, w którym pracują osoby badane, zaspokaja ich potrzeby w tym zakresie.

W tabeli 7 przedstawiono wartości różnicy motywacyjnej dla pracowników tej samej grupy przedsiębiorstw.

**Tabela 7.** Różnica motywacyjna. Wyniki szczegółowe dla pracowników firm zatrudniających od 51 do 200 pracowników (n = 642)

	<b>Średnia</b>
Docenianie pracy i sukcesów	45,9206
Rozszerzenie kompetencji	27,7683
Udział w planowaniu własnych celów	22,6081
Jasno wytyczona ścieżka kariery	21,6532
Zapraszanie do udziału w decyzji	19,3328
Podnoszenie kwalifikacji	18,4044
Delegowanie zadań	16,7372
Rozliczanie z osiągniętych wyników (zew.)	15,8771
Dobra atmosfera w pracy (zew.)	15,7061

Tabela 7. Różnica motywacyjna... (cd.)

	Średnia
Jasno i konkretnie określone cele i zadania	12,9953
Pewność zatrudnienia (zew.)	11,6921
Udział w naradach zarządu	4,4137
Zwolnienie z niemiłych obowiązków (zew.)	3,4479
Przewidywalność zdarzeń i sytuacji (zew.)	-,8383
Przekazywanie informacji o Firmie	-2,6470
Pakiet świadczeń socjalnych (zew.)	-3,2877
Jawny ranking najlepszych pracowników (zew.)	-5,0560
Zmienność bodźców motywacyjnych	-6,7341
Prestiżowa nazwa stanowiska (zew.)	-8,0809
Zainteresowanie w kwestiach pozazawodowych (zew.)	-8,5537
Urozmaicenie zadań	-10,8709
Wysoki standard stanowiska pracy (zew.)	-12,7823
Możliwość przekazywania wiedzy	-15,8118
Spotkania i wyjazdy integracyjne (zew.)	-30,4821
Elastyczny czas pracy (zew.)	-110,8507

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Training Partners*.

## 6. Wnioski

Przedstawione wyniki badania dają podstawę do sformułowania kilku wniosków.

Stwierdzić można, że w zakresie motywacji dotyczącej zewnętrznych czynników najbardziej zmotywowanymi pracownikami mogą się pochwalić przedsiębiorstwa zatrudniające do 50 pracowników oraz od 201 do 500 pracowników. Różnica jest istotna statystycznie ( $p < 0,001$ ).

Z kolei w zakresie motywacji dotyczącej wewnętrznych czynników najbardziej zmotywowanymi pracownikami mogą się pochwalić przedsiębiorstwa zatrudniające od 201 do 500 pracowników. Różnica jest istotna statystycznie ( $p < 0,05$ ).

Ponadto im większe przedsiębiorstwo, tym pracownicy słabiej oceniają motywowanie ich przez przedsiębiorstwo w zakresie zewnętrznych czynników motywacyjnych. Różnica jest istotna statystycznie ( $p < 0,001$ ).

W zakresie zaobserwowanych różnic motywacyjnych najwyższe wartości występują wśród pracowników firm zatrudniających od 201 do 500 pracowników. Najmniejsze różnice są w przedsiębiorstwach najmniejszych i największych. Zaobserwowane różnice są istotne statystycznie ( $p < 0,001$ ).

Przeprowadzenie badania postaw pracowników pozwala kadrze kierowniczej przedsiębiorstw na zrozumienie różnych sposobów widzenia przedsiębiorstwa przez pracowników, poznanie ich opinii na temat pracy i jej warunków.

Ocena kultury organizacyjnej oraz postaw pracowniczych jest potrzebna przedsiębiorstwu, które chce efektywnie działać i rozwijać się.

## Literatura

- [1] Armstrong M., *Zarządzanie zasobami ludzkimi*, Dom Wydawniczy ABC, Kraków 2001.
- [2] Franken R.E., *Psychologia motywacji*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2005.
- [3] Gick A., Tarczyńska M., *Motywowanie pracowników*, PWE, Warszawa 1999.
- [4] Herzberg F., Mausner F.W., Synderman B., *The Motivation to work*, Wiley, New York 1957.
- [5] Stanisław A., *Przystępny kurs statystyki*, StatSoft Polska, Kraków 1998.
- [6] Stevenson N., *Motywowanie pracowników*, Wyd. Liber, Warszawa 2002.
- [7] J. Wilsz, *Przedsiębiorczość człowieka w kontekście jego stałych indywidualnych cech osobowości*, „Kształcenie Zawodowe: Pedagogika i Psychologia”, nr VII, red. T. Lewowicki, J. Wilsz, I. Ziaziun i N. Nyczkało, Wydawnictwo Akademii im. Jana Długosza, Częstochowa – Kijów 2005.
- [8] J. Wilsz, *Aktywność zawodowa człowieka w procesie pracy w kontekście samoregulacji i organizacji*, [w:] *Praca człowieka w XXI wieku. Konteksty – wyzwania – zagrożenia*, red. R. Gerlach, Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2008.
- [9] J. Wilsz, *Aktywność zawodowa człowieka w kontekście mechanizmów interakcji procesów umysłowych i procesów emocjonalnych*, „Kształcenie Zawodowe: Pedagogika i Psychologia”, nr VIII, red. T. Lewowicki, J. Wilsz, I. Ziaziun i N. Nyczkało, Wydawnictwo Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie, Częstochowa – Kijów 2006.
- [10] J. Wilsz, *Zaspokajanie potrzeb sterowniczych w procesie pracy*, „Pedagogika Pracy” 2008, nr 52.
- [11] J. Wilsz, *Praca jako wartość ze względu na zaspokajanie ludzkich potrzeb*, [w:] *Wartości w pedagogice pracy*, red. B. Baraniak, Instytut Badań Edukacyjnych, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji – Państwowego Instytutu Badawczego, Warszawa – Radom 2008.
- [12] J. Wilsz, *Teoria pracy. Implikacje dla pedagogiki pracy*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2009.

## Summary

### **Factors of Non Financial Employees' Motivation in the Size-diversified Companies**

The main purpose is to present results of the research related to Polish employees' preferences referring to non financial motivation factors in size-diversified companies. Then the preferences have been compared with the effects of non financial incentive.

Subject of the research is: employees' preferences referring to the non financial aspects of motivation.

Representative test is a group of 1161 persons. The inquired employees come from 61 companies, approximately 50% of them situated in southern Poland.

Two-part questionnaire (including 25 questions) has been used in the research. Issues relate to 13 inner motivational factors (referring to work subject) and 12 to external motivational factors (referring to work environment).

The first part of questionnaire shows which factors and to what degree motivate employees to work. The second part presents to what extent a company in which they work meet requirements in this scope.

Concept of motivational difference has been defined and used in the analysis of employees' preferences in the size diversified companies.

Elżbieta Stańczyk

## **Kapitał ludzki w województwach południowych na tle pozostałych województw w latach 2003–2006**

Zasadniczym celem niniejszego opracowania jest analiza zróżnicowania jednostek terytorialnych (województw) pod względem posiadanego kapitału ludzkiego w ostatnich latach przed realizacją „Programu Operacyjnego Kapitał ludzki 2007–2013” (przyjętego przez Radę Ministrów w listopadzie 2006 r. i zatwierdzonego do realizacji przez Komisję Europejską we wrześniu 2007 r.) – por. [20]. Szczególnie skoncentrowano się na określeniu pozycji województw południowych na tle pozostałych województw za pomocą taksonomicznych mierników rozwoju (wzorując się na koncepcji Wskaźnika Rozwoju Społecznego HDI), w tym na ocenie dystansów dzielących te województwa od innych województw, a także określeniu słabych i mocnych stron analizowanych jednostek terytorialnych. Kolejnym celem przeprowadzonych badań jest sprawdzenie, czy istniały różnice w poziomie kapitału ludzkiego w wyróżnionych województwach, w tym w zależności od wyróżnionego obszaru badawczego w ramach szeroko rozumianego kapitału ludzkiego (edukacji, rynku pracy, zdrowia, potencjału demograficznego, spójności społecznej i terytorialnej), oraz jaki był stopień zróżnicowania (specjalizacji) struktury ogólnego miernika kapitału ludzkiego według obszarów w wyróżnionych jednostkach terytorialnych. W artykule wykorzystano wyniki badań zawarte w publikacji *Kapitał ludzki w województwie dolnośląskim w latach 2002–2006* wydanej przez Urząd Statystyczny we Wrocławiu w 2008 r. [15], m.in. zaproponowany zestaw wskaźników diagnostycznych.

### **1. Metody badania**

Podmiotem niniejszego opracowania były południowe województwa Polski, do których zaliczono: dolnośląskie, opolskie, małopolskie, podkarpackie i śląskie.

Źródłem danych empirycznych były informacje gromadzone przez resort statystyki publicznej, tj. dane uzyskane z Badania Aktywności Ekonomicznej Ludności (BAEL) oraz ze sprawozdawczości bieżącej, publikowane m.in. w rocznikach statystycznych, biuletynach, kwartalnikach oraz udostępniane na stronie internetowej GUS – por. [28], [29], [30], [31] i [32].

W niniejszym opracowaniu wzięto pod uwagę definicje znawców problematyki kapitału ludzkiego oraz dostępność danych empirycznych. Badaniem objęto pięć podstawowych obszarów kapitału ludzkiego, tj.: edukację, rynek pracy, zdrowie, potencjał demograficzny oraz spójność społeczną i terytorialną. Wymienione obszary były opisywane za pomocą cech, których wartości liczbowe mają postać wskaźników.

W celu określenia stopnia zróżnicowania jednostek terytorialnych – województw (przewagi i dystansu) pod względem kapitału ludzkiego zastosowano taksonomiczne metody porządkowania liniowego – mierniki rozwoju obliczone na podstawie wybranych wskaźników.

Kapitał ludzki w roku  $t$  przedstawia macierz  $X^t$ , która zawiera informacje o  $n$  obiektów (województw)  $m$ -wymiarowych, tj.

$$X^t = [x_{ij}^t]_{n \times m}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \quad (1)$$

gdzie

$t$  – okres (2003 i 2006 r.),  $x_{ij}^t$  – wartość  $j$ -tej zmiennej dla  $i$ -tego województwa w roku  $t$ ,  
 $n$  – liczba województw ( $n = 16$ ),  $m$  – liczba zmiennych diagnostycznych (mających postać wskaźników).

Pierwszym etapem badania był dobór cech statystycznych, które możliwie wyczerpująco i trafnie charakteryzowałyby analizowane zjawiska. Zakres przedmiotowy niniejszego opracowania wynikał głównie z merytorycznej ich ważności oraz dostępności danych statystycznych. Z tak dobranych cech statystycznych, na podstawie danych z 2003 i 2006 r. utworzono wstępny zestaw potencjalnych wskaźników diagnostycznych charakteryzujących kapitał ludzki.

Zmienne opisujące województwa podzielono na 5 obszarów badawczych: edukacja, rynek pracy, zdrowie, potencjał demograficzny oraz spójność społeczna i terytorialna. Utworzono zatem 5-macierzy:

$$X_k^t = [x_{ijk}^t]_{n \times m_k}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_k, k = 1, \dots, 5, \quad (2)$$

gdzie

$x_{ijk}^t$  – wartość  $j$ -tej zmiennej dla  $i$ -tego województwa w  $k$ -tym obszarze badawczym oraz w roku  $t$ ,



$m_k$  – liczba zmiennych diagnostycznych z  $k$ -tego obszaru;  $\sum_{k=1}^5 m_k = m$ .

Następnie ze zbioru potencjalnych zmiennych (por. tabl.1), wykorzystując klasyczny współczynnik zmienności  $V_s$ , dokonano eliminacji cech charakteryzujących się niskim zróżnicowaniem, tj., dla których współczynnik zmienności jest mniejszy lub równy wartości progowej  $V_s^*$  wynoszącej 10% (co najmniej w jednym z analizowanych lat – 2003 i 2006). Należały do nich zmienne:

a) w obszarze edukacji:

- współczynnik skolaryzacji brutto dla szkół gimnazjalnych, liczba osób przystępujących do egzaminu dojrzałości na 100 absolwentów liceów ogólnokształcących, liczba osób przystępujących do egzaminu dojrzałości na 100 absolwentów szkół średnich zawodowych (kształcenie na wybranych poziomach edukacji);
- liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży przypadająca na 1 komputer przeznaczony na użytek uczniów, z dostępem do Internetu (komputeryzacja);
- liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży uczących się języka obcego jako przedmiotu obowiązkowego na 100 uczniów, liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży uczących się języka obcego jako przedmiotu obowiązkowego na 100 uczniów (nauka języków obcych);
- liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży przypadająca na pomieszczenie szkolne, liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży przypadająca na 1 oddział, liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży na pomieszczenie szkolne, liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży na 1 oddział (warunki lokalowe nauczania);
- liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży na 1 nauczyciela, liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży na 1 nauczyciela (kadra nauczycielska);
- wydatki na oświatę i wychowanie z budżetów jednostek samorządu terytorialnego (powiatu i gmin) na 1000 ludności w wieku 3–24 lata, przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w sekcji edukacja, w relacji do średniego wynagrodzenia brutto (inwestycje w edukację);

b) rynku pracy:

- wskaźnik zatrudnienia, wskaźnik zatrudnienia w grupie osób w wieku produkcyjnym, wskaźnik zatrudnienia w grupie osób w wieku 15–24 lata, wskaźnik zatrudnienia w grupie osób z wykształceniem wyższym (aktywność ekonomiczna – pracujący);

- relacja: napływ/odpływ bezrobocia na 100 zarejestrowanych bezrobotnych (aktywność ekonomiczna – bezrobotni);
- udział absolwentów w liczbie przyjętych do pracy ogółem (absolwenci na rynku pracy);
- przeciętne wynagrodzenie brutto osób z wykształceniem wyższym w relacji do średniej w województwie, przeciętne wynagrodzenie brutto osób pracujących 30 lat i więcej w relacji do wynagrodzenia osób pracujących do 1 roku (wynagrodzenia);
- c) zdrowia:
  - przeciętne dalsze trwanie życia mężczyzn, przeciętne dalsze trwanie życia kobiet (długość życia);
  - liczba zgonów w wieku 15–44 na 1000 ludności w wieku 15–44 lat, liczba zgonów, których przyczyną były nowotwory na 100 tys. ludności (stan zdrowia);
  - liczba porad ogólnodostępnych w placówkach ambulatoryjnej opieki zdrowotnej na 1 mieszkańca (dostępność usług w ramach ochrony zdrowia);
- d) potencjału demograficznego:
  - udział ludności w wieku produkcyjnym w ogólnej liczbie ludności (stan i struktura ludności);
  - współczynnik płodności, współczynnik dzietności, przeciętny wiek kobiet rodzących dziecko, udział matek w wieku 24 i mniej lat w ogólnej liczbie rodzących kobiet, udział matek w wieku 30 i więcej lat w ogólnej liczbie rodzących kobiet, udział pracujących w ogólnej liczbie zmarłych w wieku 15–59 lat (ruch naturalny);
- e) spójności społecznej i terytorialnej:
  - udział bezrobotnych pozostających bez pracy powyżej 24 miesięcy w ogólnej liczbie bezrobotnych, udział bezrobotnych bez prawa do zasiłku w ogólnej liczbie bezrobotnych (osoby w trudnej sytuacji na rynku pracy);
  - przeciętna miesięczna renta z tytułu niezdolności do pracy w stosunku do przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia, przeciętna miesięczna emerytura i renta brutto w stosunku do przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia (zagrożenie ubóstwem).

Kolejnym kryterium doboru zmiennych do analizy było słabe skorelowanie ich między sobą. Zatem dla każdego wyróżnionego obszaru badawczego obliczono współczynniki korelacji wszystkich par zmiennych, wyznaczając macierze:

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m_k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m_k 1} & r_{m_k 2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie  $r_{jl}$  to współczynniki korelacji liniowej Pearsona  $j$ -tej i  $l$ -tej zmiennej z  $k$ -tego obszaru badawczego ( $j, l = 1, 2, \dots, m_k$ ).

Jednym ze sposobów eliminacji cech, które są nośnikiem podobnych lub takich samych informacji, w zależności od układu wartości macierzy korelacji, jest metoda parametrycznej klasyfikacji i doboru cech Hellwiga – por. [5], [13], [16], [18], [19], [23], [24] i [26]. Metoda ta pozwala na wydzielenie trzech klas cech, tj. cech centralnych, satelitarnych i izolowanych. Podstawę klasyfikacji cech stanowiła krytyczna wartość współczynnika korelacji liniowej  $r^*$ , która określa poziom istotności współczynnika korelacji (w opracowaniu przyjęto poziom  $r^* = 0,7$  arbitralnie<sup>1</sup>).

Dostępne cechy statystyczne (wskaźniki charakteryzujące kapitał ludzki) mogą tworzyć tzw. skupienia cech będących nośnikiem podobnych informacji, tj. takie podzbiory, w których współczynnik korelacji liniowej między dowolnymi dwiema cechami jest nie mniejszy niż zadana krytyczna wartość współczynnika korelacji  $r^*$  (tu: 0,7). W każdym skupieniu znajduje się cecha tzw. centralna oraz co najmniej jedna cecha satelitarna, tj. taka, dla której podobieństwo do wyróżnionej cechy centralnej (mierzone współczynnikiem korelacji) jest nie mniejsze niż  $r^*$ . Cechy, które nie należą do skupień, nazywane są cechami izolowanymi.

W celu wyodrębnienia skupień cech z parametrem  $r^*$  wykonano następujące czynności:

1. Obliczono sumę wartości bezwzględnych elementów każdej  $j$ -tej kolumny macierzy  $R_k$ :

$$R_{kj} = \sum_{i=1}^{m_k} |r_{ij}| \quad j = 1, 2, \dots, m_k.$$

2. Znaleziono kolumnę o numerze  $j_0$ , dla której powyższa suma jest największa:

$$R_{kj_0} = \max_{j=1,2,\dots,m_k} R_{kj}.$$

3. W kolumnie  $j_0$  wyróżniono elementy  $r_{i_0}$  spełniające nierówność:  $|r_{i_0}| > r^*$  oraz odpowiadające tym elementom wiersze. Cechę, którą odzwierciedlała ta

<sup>1</sup> W analizach statystycznych zwykle przyjmuje się, że wartość współczynnika korelacji Pearsona z przedziału (0,7; 0,9) świadczy o znaczącej zależności korelacyjnej między zmiennymi.

kolumna, uznano za pierwszą cechę centralną, a cechy odpowiadające wyróżnionym wierszom – za jej cechy satelitarne, czyli cechy o podobieństwie do cechy centralnej nie mniejszym niż  $r^*$ . W ten sposób uzyskano pierwsze skupisko cech.

4. Z macierzy  $R_k$  skreślono wyróżnione kolumny i wiersze, otrzymując tzw. zredukowaną macierz korelacji.
5. Kontynuowano postępowanie opisane w punktach 1–4, otrzymując dalsze skupienia cech i nowe zredukowane macierze, aż do momentu wyczerpania zbioru cech.

I tak, w wyniku powyższego postępowania, spośród cech z listy wstępnej wyodrębniono następujące cechy satelitarne:

a) w obszarze edukacji:

- uczniowie w szkołach podstawowych powtarzający klasę na 1000 uczniów, liczba absolwentów liceów ogólnokształcących nieotrzymujących świadectwa dojrzałości na 100 absolwentów przystępujących do egzaminu dojrzałości, liczba uczestników studiów doktoranckich na 1000 studentów (kształcenie na wybranych poziomach edukacji);
- odsetek absolwentów szkół wyższych kierunków matematycznych i technicznych w ogólnej liczbie absolwentów (kierunki kształcenia);
- nakłady na działalność badawczo-rozwojową na 1 mieszkańca, liczba nominacji profesorskich na 1 mln mieszkańców (nauka i postęp techniczny);

b) rynku pracy:

- współczynnik zwolnień zatrudnionych (absolwenci na rynku pracy; ruch zatrudnionych);
- udział pracujących w sektorze usług w ogólnej liczbie pracujących (sektrowość rynku pracy);
- przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto specjalistów w relacji do wynagrodzenia pracowników przy pracach prostych (wynagrodzenia);

c) zdrowia:

- liczba zgonów dzieci 0–4 na 1000 dzieci w wieku 0–4 lata (stan zdrowia);

d) potencjału demograficznego:

- liczba dzieci w wieku 0-14 lat przypadająca na 100 osób w wieku 65 lat i więcej (stan i struktura ludności);
- udział matek w wieku 30 i więcej lat w ogólnej liczbie rodzących kobiet (ruch naturalny);
- liczba imigrantów zagranicznych na 10 tys. ludności, saldo migracji ogółem na 10 tys. ludności (migracje);

e) spójności społecznej i terytorialnej:

- odsetek osób w gospodarstwach domowych znajdujących się poniżej ustawowej granicy ubóstwa (zagrożenie ubóstwem).

Wyznaczone cechy centralne oraz izolowane (nie należą do żadnego z otrzymanych skupisk) utworzyły finalny zestaw wskaźników diagnostycznych, lista których znajduje się w tablicy 1.

Następny etap analizy dotyczył określenia charakteru przyjętych wskaźników diagnostycznych, tj. ich podziału na stymulanty oraz destymulanty. Pod pojęciem stymulant rozumie się cechy, których wysokie wartości wskazują na wysoki poziom kapitału ludzkiego (im wyższe wartości tych cech, tym wyższe wartości miernika kapitału ludzkiego). Destymulantami są cechy, których wysokie wartości mogą hamować rozwój kapitału ludzkiego – pożądane są niskie wartości tych cech (im niższe ich wartości, tym wyższe wartości miernika kapitału ludzkiego).

Dla każdego z przyjętych do badania 5 obszarów badawczych (edukacja, rynek pracy, zdrowie, potencjał demograficzny oraz spójność społeczna i terytorialna) na podstawie finalnego zestawu cech – wskaźników diagnostycznych – dla każdej jednostki terytorialnej (województwa) w latach 2003 i 2006 obliczono, wzorując się na koncepcji Wskaźnika Rozwoju Społecznego HDI (*Human Development Index*)<sup>2</sup>, odpowiednią wartość syntetycznych mierników rozwoju *i*-tej jednostki terytorialnej w obszarze *k* w roku *t* według wzoru:

$$H_{ik}^t = \sum_{j=1}^{n_k} w_{jk} \frac{X_{jik} - \min\{X_{jik}\}}{\max\{X_{jik}\} - \min\{X_{jik}\}} \text{ w przypadku stymulant} \quad (3)$$

oraz

$$H_{ik}^t = \sum_{j=1}^{n_k} w_{jk} \frac{\max\{X_{jik}\} - X_{jik}}{\max\{X_{jik}\} - \min\{X_{jik}\}} \text{ w przypadku destymulant,} \quad (4)$$

gdzie

*i* – numer jednostki terytorialnej (województwa), *i* = 1, ..., 16;

*k* – numer obszaru badawczego, *k* = 1, ..., 5 (edukacja, rynek pracy, zdrowie, potencjał demograficzny, spójność społeczna i terytorialna);

*n<sub>k</sub>* – liczba wskaźników diagnostycznych w *k*-tym obszarze;

<sup>2</sup> Wskaźnik HDI jest miernikiem syntetycznym opartym na średniej wskaźników obejmujących trzy podstawowe sfery życia: zdrowie (oceniane przez przeciętne dalsze trwanie życia noworodka), edukację (średnia ważona ogólnego współczynnika skolaryzacji brutto dla wszystkich poziomów edukacji i poziomu analfabetyzmu, tj. procentu dorosłej ludności umiejącej pisać i czytać ze zrozumieniem) oraz dochód (wielkości PKB na mieszkańca); por. m.in. *Human Development Report 2001*, Oxford University Press, New York 2001.

$t$  – analizowany rok,  $t = 2003, 2006$ ;

$H_{ik}^t$  – wartość syntetycznego miernika dla  $i$ -tej jednostki terytorialnej w  $k$ -tym obszarze w okresie  $t$ ;

$X_{jik}^t$  – wartość  $j$ -tego wskaźnika diagnostycznego dla  $i$ -tej jednostki terytorialnej w  $k$ -tym obszarze w okresie  $t$ ;

$w_{jk}$  – waga  $j$ -tego wskaźnika diagnostycznego w  $k$ -tym obszarze.

Wagi wskaźników zależą od wagi przypisanej wyróżnionym grupom w ramach poszczególnych obszarów:

$$w_{jk} = \frac{1}{m_k \cdot n_{mk}}, \text{ gdzie}$$

$m_k$  – liczba wyróżnionych zakresów w ramach danego obszaru,

$n_{mk}$  – liczba wskaźników diagnostycznych w  $m$ -tym zakresie i  $k$ -tym obszarze.

Dodatkowo, zgodnie z powyższą metodologią, w ramach  $k$ -tego obszaru dla każdego  $m_k$ -tego zakresu policzono cząstkowe mierniki rozwoju  $i$ -tej jednostki terytorialnej, przypisując jednakowe znaczenie każdej cesze, tj. wagę równą  $1/n_k$ .

Ogólny miernik kapitału ludzkiego dla  $i$ -tej jednostki terytorialnej w okresie  $t$  obliczono według wzoru:

$$H_i^t = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 H_{ik}^t \quad (5)$$

Mierniki te (ogólny miernik kapitału ludzkiego, mierniki dla poszczególnych  $k$ -tych obszarów zaliczanych do kapitału ludzkiego oraz cząstkowe mierniki dla poszczególnych  $m_k$ -tych zakresów w ramach  $k$ -tych obszarów) przyjmują wartości z przedziału  $[0, 1]$ , przy czym miara rozwoju jest równa 1 dla wzorca rozwoju (tj. teoretycznej jednostki, dla której wszystkie analizowane cechy, mające postać stymulant przyjmują wartości maksymalne, a wszystkie destymulanty wartości minimalne) oraz 0 dla antywzorca (tj. teoretycznej jednostki, dla której wszystkie analizowane cechy przyjmują wartości najmniej korzystne). Stąd im wyższa wartość miernika rozwoju, tym wyższym poziomem badanego zjawiska charakteryzuje się dana jednostka terytorialna, czyli – im większa rozpiętość między daną jednostką a przyjętym wzorcem teoretycznym, tym niższy poziom rozwoju danej jednostki, a więc tym więcej dana jednostka ma do nadrobienia w rozwoju pod względem poszczególnych obszarów kapitału ludzkiego.

Na podstawie taksonomicznych mierników rozwoju dokonano podziału województw na 4 grupy poziomu miernika kapitału ludzkiego – por. [13], [16], [26]:

— I grupa (wysoki poziom kapitału ludzkiego) – miernik  $H_i > \bar{H} + s$ ;

- II grupa (średni poziom kapitału ludzkiego) – miernik  $H_i$  w przedziale  $\bar{H} < H_i \leq \bar{H} + s$ ;
- III grupa (niski poziom kapitału ludzkiego) – miernik  $H_i$  w przedziale  $\bar{H} - s < H_i \leq \bar{H}$ ;
- IV grupa (bardzo niski poziom kapitału ludzkiego) – miernik  $H_i \leq \bar{H} - s$ ,  
gdzie  $\bar{H}$  – średnia arytmetyczna,  $s$  – odchylenie standardowe.

Analizując zróżnicowanie dynamiki wartości mierników rozwoju (ogólnego i dla poszczególnych obszarów) w badanym okresie, obliczono dla każdego  $i$ -obiektu (województwa):

indeks dynamiki

$$I_i = \frac{H_i^t}{H_i^{t_0}} \cdot 100\% = \frac{H_i^{2006}}{H_i^{2003}} \cdot 100\% \quad I_{ik} = \frac{H_{ik}^t}{H_{ik}^{t_0}} \cdot 100\% = \frac{H_{ik}^{2006}}{H_{ik}^{2003}} \cdot 100\% \quad (6)$$

W celu określenia stopnia zróżnicowania (specjalizacji) struktury ogólnego miernika rozwoju według wyróżnionych pięciu obszarów badawczych obliczono odległość między daną strukturą miernika a strukturą jednorodną (każdy z obszarów badawczych stanowi  $\frac{1}{5}$  miernika):

$$W_i^t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 \left| u_{ik}^t - \frac{1}{5} \right| \quad \text{gdzie } u_{ik}^t = \frac{H_{ik}^t}{5H_i^t} \quad (7)$$

oznacza dla  $i$ -tego województwa udział  $k$ -tego obszaru w wartości ogólnego miernika kapitału ludzkiego, a przeciętne wahanie zajmowanych lokat w poszczególnych obszarach jest dane wzorem:

$$D_i^t = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \left| R_{ki}^t - \bar{R}_i^t \right| \quad (8)$$

gdzie:

$R_{ki}^t$  – lokata  $i$ -tej jednostki terytorialnej w  $k$ -tym obszarze w okresie  $t$ ,

$\bar{R}_i^t$  – średnia arytmetyczna lokat  $i$ -tej jednostki terytorialnej w okresie  $t$ .

$R_{ki}^t$  – lokata  $i$ -tej jednostki terytorialnej w  $k$ -tym obszarze w okresie  $t$ ,

$\bar{R}_i^t$  – średnia arytmetyczna lokat  $i$ -tej jednostki terytorialnej w okresie  $t$ .

W celu uwypuklenia różnic, w latach 2003–2006, w strukturze ogólnego miernika kapitału ludzkiego (różnego wpływu wyróżnionych 5 obszarów badawczych) zastosowano współczynnik różnic strukturalnych liczony jako średnia bezwzględnych różnic między odpowiednimi udziałami procentowymi:

$$W_i^{t-t_0} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 |u_{ik}^t - u_{ik}^{t_0}| \quad (9)$$

Z uwagi na fakt, że województwa uzyskiwały różne wyniki pod względem pięciu wyróżnionych obszarów badawczych kapitału ludzkiego, dodatkowo dla każdej pary jednostek terytorialnych policzono analogicznie średnią bezwzględnych różnic między odpowiednimi cząstkowymi miernikami kapitału ludzkiego, tj. dla  $i$ -tego oraz  $j$ -tego województwa:

$$W_{ij}^t = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 |H_{ik}^t - H_{jk}^t| \quad (10)$$

## 2. Ogólny miernik kapitału ludzkiego w województwach południowych na tle pozostałych województw

Ogólny miernik kapitału ludzkiego, policzony jako średnia arytmetyczna mierników wymienionych 5 obszarów przyjmował w 2006 roku wartości od 0,447 (województwo świętokrzyskie) do 0,683 (województwo mazowieckie) – zmienność na poziomie 10,6%. Natomiast trzy lata wcześniej wartości miernika kształtowały się na poziomie od 0,354 (województwo warmińsko-mazurskie) do 0,550 (województwo mazowieckie) – zmienność 11,1%.

Spośród analizowanych 5 województw południowych najlepsze wyniki – zarówno w 2003 r., jak i w 2006 r. – osiągnęło województwo małopolskie, zajmując z wartością miernika równą 0,475 miejsce 2 w 2003 r. oraz z wartością miernika 0,565 – 3 miejsce w 2006 r. (por. rys. 1). Aby pokonać dystans dzielący to województwo od pierwszego w rankingu – mazowieckiego, jego miernik rozwoju musiałby ulec zwiększeniu tylko o 15,8% w 2003 r. (i o 18,4% w 2006 r.).

Tabl. 2. Miernik kapitału ludzkiego i jego dystans dzielący dane województwo od wzorca w 2003 i 2006 r.

Województwo	Miernik $H_i^t$	Dystans $\max\{H_i^t\} - H_i^t$	$\frac{\max\{H_i^t\} - H_i^t}{H_i^t} \cdot 100\%$
<b>2003</b>			
Dolnośląskie	0,425	0,125	29,4%
Małopolskie	0,475	0,075	15,8%
Opolskie	0,382	0,168	44,1%
Podkarpackie	0,395	0,155	39,2%
Śląskie	0,450	0,100	22,1%
<b>2006</b>			
Dolnośląskie	0,541	0,128	23,7%
Małopolskie	0,565	0,104	18,4%



Tabl. 2. Miernik kapitału... (cd.)

Województwo	Miernik $H_i'$	Dystans $\frac{\max\{H_i'\} - H_i'}{H_i'}$	$\frac{\max\{H_i'\} - H_i'}{H_i'} \cdot 100\%$
Opolskie	0,470	0,200	42,5%
Podkarpackie	0,490	0,179	36,6%
Śląskie	0,520	0,150	28,8%

Źródło: obliczenia na podstawie danych zawartych w publikacji „Kapitał ludzki w województwie dolnośląskim w latach 2002–2006”, Urząd Statystyczny we Wrocławiu, 2008, s. 260–263; Banku Danych Regionalnych, GUS, Warszawa (<http://www.stat.gov.pl/>)

Wysoką pozycję miało również województwo dolnośląskie – 6 miejsce w 2003 r. i 5 – 2006 r. Aby osiągnąć poziom porównywalny z najlepszym w rankingu województw, miernik kapitału ludzkiego województwa dolnośląskiego musiałby ulec zwiększeniu o 29,4% w 2003 r. (i 23,7% w 2006 r.). Stosunkowo dalekie miejsca zajęły opolskie (odpowiednio 14 i 13 lokata w 2003 r. i 2006 r.) oraz podkarpackie (odpowiednio 11 i 10 lokata). Ogólny miernik kapitału ludzkiego dla tych dwóch województw przyjmował wartości poniżej średniej z wszystkich województw.

Wykorzystując klasyczne parametry statystyczne, tj. średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe, wyodrębniono 4 grupy województw charakteryzujących się zbliżonym poziomem wartości ogólnego miernika kapitału ludzkiego.



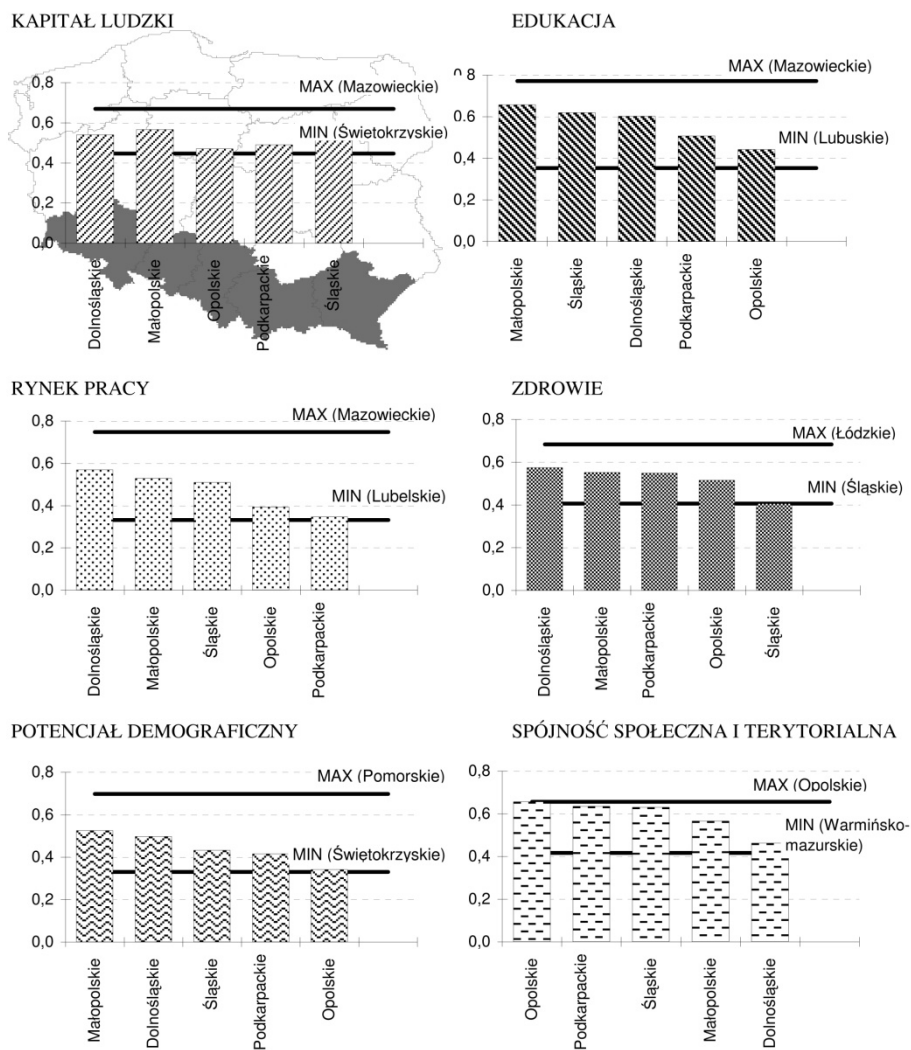
Rys. 1. Miernik kapitału ludzkiego według województw w 2006 r.



Tabl. 3. Miernik kapitału... (cd.)

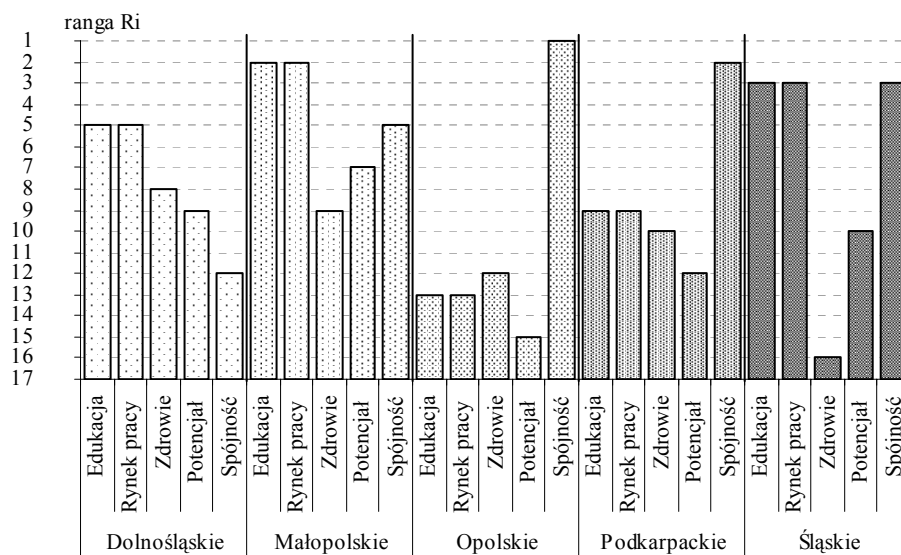
Wyszczególnienie	Dolnośląskie		Małopolskie		Opolskie		Podkarpackie		Śląskie	
	2003	2006	2003	2006	2003	2006	2003	2006	2003	2006
<b>Potencjał demograficzny</b>										
miernik	0,448	0,498	0,546	0,525	0,312	0,342	0,435	0,416	0,450	0,432
ranga	10	9	7	7	16	15	11	12	9	10
poziom wartości miernika	III	III	II	II	IV	IV	III	III	III	III
<b>Spójność społeczna i terytorialna</b>										
miernik	0,484	0,462	0,544	0,566	0,643	0,656	0,536	0,635	0,677	0,631
ranga	10	12	4	5	2	1	5	2	1	3
poziom wartości miernika	III	III	II	II	I	I	II	I	I	I

Źródło: obliczenia na podstawie [15], [29].

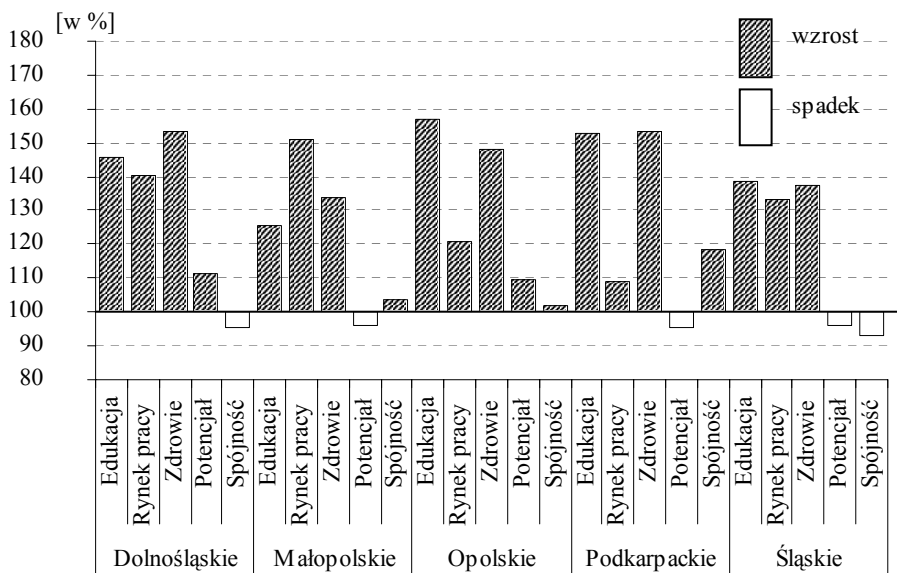


**Rys. 2.** Miernik kapitału ludzkiego w województwach południowych na tle pozostałych województw według wyróżnionych obszarów badawczych w 2006 r.

Źródło: oprac. na podstawie [15], [29], [31], [32].



**Rys.3.** Rangi województw południowych według częściowych mierników kapitału ludzkiego w 2006 r.  
Źródło: oprac. na podstawie danych tablicy 3.



**Rys. 4.** Dynamika mierników kapitału ludzkiego według wyróżnionych obszarów w województwach południowych w latach 2003–2006.  
Źródło: oprac. na podstawie danych tablicy 3.

Mocną stroną województwa dolnośląskiego w 2006 r. były dobre noty w obszarze rynku pracy (II grupa – średni poziom miernika i 3 lokata) i edukacji (II grupa – średni poziom miernika i 5 lokata).

Dolnośląskie charakteryzowało się m.in. wysokimi notami pod względem sektorowości rynku pracy i aktywności ekonomicznej – pracujących, oraz dodatkowo, w 2006 r., pod względem sytuacji absolwentów na rynku pracy (ruchu zatrudnionych), wydajności i wynagrodzenia. W obszarze edukacji wyróżniało się znacznymi wartościami wskaźników w zakresie kształcenia ustawicznego, komputeryzacji, struktury ludności według wykształcenia, nauki i postępu technicznego – rys. 5.

Na niską pozycję województwa opolskiego wpływ miał m.in. bardzo niski poziom miernika w obszarze potencjału demograficznego (IV grupa i 15 lokata), a województwa podkarpackiego – bardzo niski poziom miernika w obszarze rynku pracy (IV grupa i 14 lokata).

Dla tych województw oraz województwa śląskiego otrzymano wysokie wartości mierników kapitału ludzkiego w obszarze spójności społecznej i terytorialnej (mocne strony regionu), które wynikały głównie z bardzo dobrych wyników w zakresie zróżnicowania wewnątrzregionalnego, zróżnicowania między wsią a miastem oraz dodatkowo szczególnie dobrych wyników w zakresie wskaźników charakteryzujących sytuację osób niepełnosprawnych – w przypadku opolskiego, i dobrych wyników w zakresie wskaźników charakteryzujących zagrożenie ubóstwem – w przypadku śląskiego, czy wskaźników charakteryzujących przestępczość.

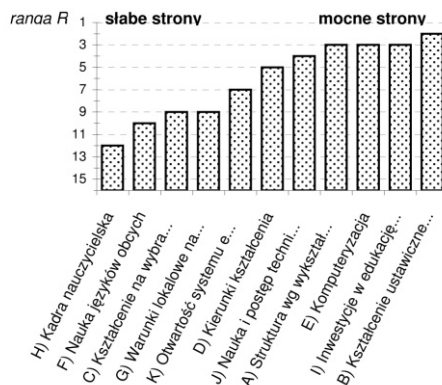
W omawianym okresie dla każdego z analizowanych województw miernik kapitału ludzkiego uległ zwiększeniu – wskaźnik dynamiki kształtował się na poziomie od 115,4% (województwo śląskie) do 127,6% (warmińsko-mazurskie) – por. tabl.5. W województwie dolnośląskim nastąpił wzrost wartości miernika o 27,3% i była to, na tle pozostałych województw, druga co do wielkości wartość wskaźnika dynamiki. Warto tu przypomnieć, iż województwo dolnośląskie szczególnie poprawiło swoje wyniki w obszarze zdrowia (wzrost wartości miernika o 53,3%), edukacji (wzrost o 46,0%) i rynku pracy (wzrost o 40,6%), a w obszarze spójności społecznej i terytorialnej nastąpiło nieznaczne pogorszenie (spadek wartości miernika o 4,7%) – por. rys. 3 i 4.

W województwach podkarpackim i opolskim miernik kapitału ludzkiego wzrósł odpowiednio o 24,0% i 23,0% (piąta i szósta, co do wielkości, wartość wskaźnika dynamiki). W obu tych województwach nastąpił wzrost wartości miernika w obszarze edukacji (odpowiednio o 52,9% i 57,2%) oraz zdrowia (odpowiednio o 53,7% i 48,0%). Nieznaczny spadek wartości miernika kapitału ludzkiego wystąpił jedynie w obszarze potencjału demograficznego – tylko dla województwa podkarpackiego (o 4,3%) – por. rys. 4.

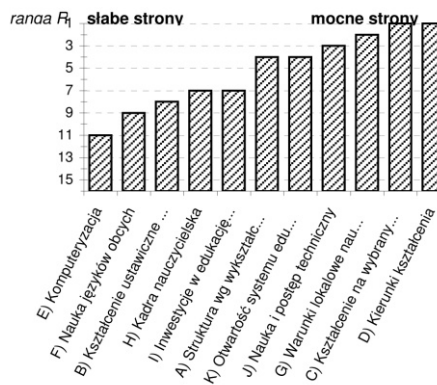
Relatywnie słabą dynamiką miernika kapitału ludzkiego odznaczały się województwa śląskie i małopolskie – odpowiednio 115,4% i 119,1%, przy średnim poziomie w województwach wynoszącym 122,4%. Zarówno w województwie śląskim, jak i w małopolskim nastąpiło pogorszenie not w obszarze potencjału demograficznego – spadek o 4,0% i 3,8%.

W latach 2003–2006 wystąpiły niewielkie różnice w zajmowanych lokatach – co najwyżej o 3 miejsca – tylko w przypadku województwa śląskiego (spadek z 5 pozycji na 8). Pozostałe województwa południowe w rankingu województw zmieniły tylko o jedno miejsce swoją pozycję, przy czym awansowały: dolnośląskie (z 6 miejsca w 2003 r. na 5 miejsce w 2006 r.), opolskie (z 14 na 13) oraz podkarpackie (z 11 na 10), natomiast w przypadku małopolskiego nastąpił spadek z 2 na 3 miejsce.

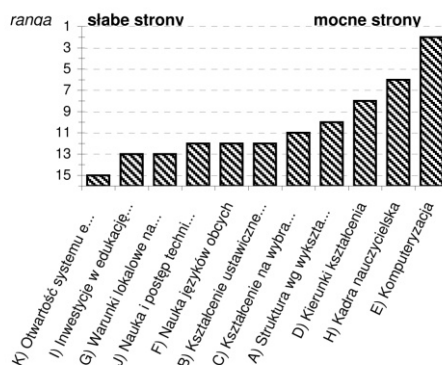
## DOLNOŚLĄSKIE



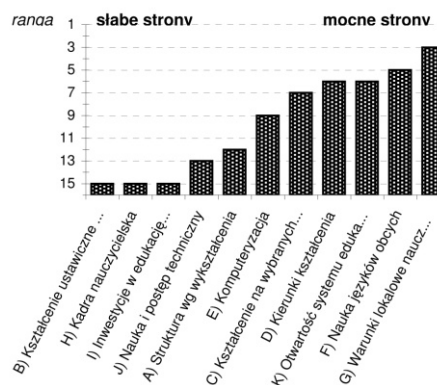
## MAŁOPOLSKIE



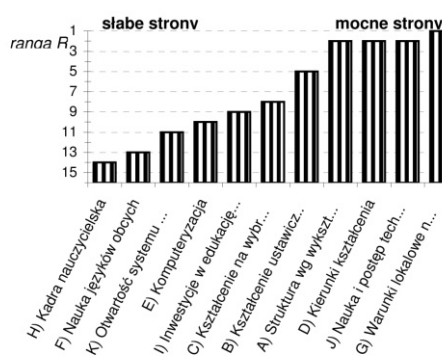
## OPOLSKIE



## PODKARPACKIE



## ŚLĄSKIE



Wyróżnione zakresy w ramach obszaru edukacji

- A) Struktura ludności według wykształcenia
- B) Kształcenie ustawiczne osób w wieku 25-64 lata
- C) Kształcenie na wybranych poziomach edukacji
- D) Kierunki kształcenia
- E) Komputeryzacja
- F) Nauka języków obcych
- G) Warunki lokalowe nauczania
- H) Kadra nauczycielska
- I) Inwestycje w edukację, wydatki na oświatę i wychowanie
- J) Nauka i postęp techniczny
- K) Otwartość systemu edukacji na świat

Rys. 5. Rangi województw południowych według wyróżnionych zakresów edukacji w 2006 r.

Źródło: oprac. na podstawie danych tablicy 5.



### 3. Zróżnicowanie ogólnego miernika kapitału ludzkiego według wyróżnionych obszarów badawczych

W celu określenia stopnia zróżnicowania (specjalizacji) struktury ogólnego miernika rozwoju według wyróżnionych pięciu obszarów badawczych obliczono odległość między daną strukturą miernika a strukturą jednorodną (każdy z obszarów badawczych stanowi  $\frac{1}{5}$  miernika).

Na podstawie wartości cząstkowych mierników kapitału ludzkiego można stwierdzić, iż największym stopniem zróżnicowania (specjalizacją) kapitału ludzkiego wśród województw południowych w 2006 r. odznaczało się województwo opolskie (najwyższy udział stanowił miernik w obszarze spójności społecznej i terytorialnej (27,9%), natomiast najmniejszy – w obszarze potencjału demograficznego (14,6%), oraz podkarpackie – najwyższy udział stanowił także miernik w obszarze spójności społecznej i terytorialnej (25,9%), natomiast najmniejszy – w obszarze rynku pracy (14,1%).

Relatywnie najmniejszym stopniem zróżnicowania (specjalizacją) kapitału ludzkiego według obszarów, wśród województw południowych w 2006 r., odznaczało się województwo małopolskie – współczynnik zróżnicowania struktury wynosił 3,2% (najwyższym udziałem w ogólnej wartości miernika charakteryzował się miernik w obszarze edukacji 23,0%, a najmniejszym – w obszarze potencjału demograficznego 18,6%).

Największe zmiany w strukturze ogólnego miernika kapitału ludzkiego w latach 2003–2006 wystąpiły w warmińsko-mazurskim i śląskim (współczynnik zmian strukturalnych wynosił ok. 3,7 %), a najmniejsze w podlaskim (współczynnik zmian strukturalnych – ok. 2,2 %).

Tabl. 4. Struktura miernika kapitału ludzkiego według obszarów badawczych i województw

Wyszczególnienie	Edukacja	Rynek pracy	Zdrowie	Potencjał demograficzny	Spójność społeczna i terytorialna	Współczynnik zróżnicowania struktury $W_i'$	Współczynnik zmian strukturalnych $W_i^{t-t_0}$
	$u_{ik}^t, u_{ik}^{t_0}$ [w %]					[w %]	
<b>2003</b>							
Dolnośląskie	19,4	19,1	17,6	21,1	22,8	3,9	x
Małopolskie	22,0	14,8	17,3	23,0	22,9	7,9	x
Opolskie	14,7	17,1	18,2	16,3	33,7	13,7	x
Podkarpackie	16,7	16,1	18,1	22,0	27,1	9,1	x
Śląskie	19,8	17,0	13,1	20,0	30,1	10,1	x

Tabl. 4. Struktura miernika kapitału... (cd.)

Wyszczególnienie	Edukacja	Rynek pracy	Zdrowie	Potencjał demograficzny	Spójność społeczna i terytorialna	Współczynnik zróżnicowania struktury $W'_i$	Współczynnik zmian strukturalnych $W_i^{t-t_0}$
	$u'_{ik}, u''_{ik}$ [w %]					[w %]	
<b>2006</b>							
Dolnośląskie	22,2	21,1	21,2	18,4	17,1	4,5	3,4
Małopolskie	23,2	18,7	19,5	18,6	20,0	3,2	2,9
Opolskie	18,8	16,8	21,9	14,6	27,9	9,9	3,1
Podkarpackie	20,6	14,1	22,4	17,0	25,9	8,9	3,3
Śląskie	23,8	19,6	15,6	16,6	24,3	8,1	3,7

Źródło: obliczenia na podstawie danych zawartych w tablicy 3.

Konsekwencją zróżnicowania (specjalizacji) poziomu kapitału ludzkiego według wyróżnionych 5 obszarów badawczych opisujących kapitał ludzki były różnice lokat zajmowanych w poszczególnych obszarach (por. rys. 3). Nie było województwa, które zajmowałoby zbliżoną lokatę pod względem wyróżnionych mierników kapitału ludzkiego, tj. liczonych oddzielnie dla każdego z pięciu obszarów badawczych.

W 2003 r. różnica między najwyższą a najniższą lokatą wynosiła od 5 (województwo kujawsko-pomorskie, mazowieckie) do 15 miejsc (śląskie). I tak, województwo śląskie zajmowało 1 lokatę pod względem spójności społecznej i terytorialnej (którą można zaliczyć do mocnych stron tego regionu) oraz 16 – pod względem zdrowia (co można zaliczyć do słabych stron) – por. rys. 3. Również w przypadku województwa opolskiego wystąpił znaczny rozstęp wartości zajmowanych lokat w poszczególnych obszarach kapitału ludzkiego – wynosił on w 2003 r. 14 miejsc – 2 lokata pod względem spójności społecznej i terytorialnej (mocna strona regionu) oraz 16 pod względem potencjału demograficznego (słaba strona regionu).

W okresie od 2003 r. do 2006 r. dla wielu jednostek terytorialnych zwiększeniu uległa różnica między najwyższą a najniższą lokatą pod względem wyróżnionych 5 obszarów kapitału ludzkiego. Szczególnie wyróżnić można województwo podkarpackie, dla którego rozstęp wartości zajmowanych lokat w poszczególnych obszarach kapitału ludzkiego w 2003 r. wynosił 6 miejsc (5 miejsc pod względem spójności społecznej i terytorialnej oraz 11 pod względem zdrowia i potencjału demograficznego), natomiast w 2006 r. – 12 miejsc (pogorszenie sytuacji na rynku pracy – 14 miejsc i polepszenie sytuacji w zakresie spójności społecznej i terytorialnej – 2 miejsc).

#### 4. Podsumowanie

W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że zróżnicowanie województw pod względem ogólnego miernika kapitału ludzkiego, liczonego na podstawie danych z 2003 r. oraz na podstawie danych z 2006 r., nie było znaczne (odpowiednio 11,1% i 10,2%). Pierwsze trzy lokaty w rankingu zajmowały zarówno w 2003 r., jak i 2006 r. województwa mazowieckie, pomorskie i małopolskie, a ostatnie – warmińsko-mazurskie i świętokrzyskie (por. rys. 6). Spośród województw południowych stosunkowo wysokie miejsca zajmowały małopolskie, dolnośląskie oraz śląskie (szczególnie w 2003 r.). Pozostałe województwa południowe, tj. opolskie i podkarpackie charakteryzowały się średnim poziomem wartości miernika kapitału ludzkiego.

Wartości ogólnego miernika kapitału ludzkiego liczone były w oparciu o mierniki dla wyróżnionych obszarów badawczych: edukacji, rynku pracy, zdrowia, potencjału demograficznego oraz spójności społecznej i terytorialnej. W każdym z wymienionych obszarów kapitału ludzkiego zarówno wartości mierników, jak i lokaty analizowanych południowych województw kształtowały się odmiennie. Szczególnie znaczny rozstęp wartości zajmowanych lokat w poszczególnych obszarach kapitału ludzkiego wystąpił w województwach śląskim i opolskim.

Stosunkowo znaczny dystans między skrajnymi województwami, tj. województwem znajdującym się w uporządkowaniu na pierwszym i ostatnim miejscu, wystąpił pod względem mierników w obszarze edukacji; relatywnie niska wartość rozstępu miernika kapitału ludzkiego wystąpiła w obszarze potencjału demograficznego. W przypadku województw południowych największe zróżnicowanie wystąpiło dla mierników w obszarze rynku pracy oraz edukacji, a najmniejsze – w obszarze zdrowia i potencjału demograficznego.

Do mocnych stron województw opolskiego, podkarpackiego i śląskiego należały dobre noty w obszarze spójności społecznej, a województwa dolnośląskiego i małopolskiego – w obszarze edukacji i rynku pracy. Słabą stroną zarówno małopolskiego i śląskiego były niskie noty w obszarze zdrowia, natomiast w przypadku dolnośląskiego – w obszarze spójności społecznej i terytorialnej, w przypadku opolskiego – w obszarze potencjału demograficznego i edukacji, a w przypadku podkarpackiego – w obszarze rynku pracy.

#### Literatura

- [1] Becker G.S., *Ekonomiczna teoria zachowań ludzkich*, PWN, Warszawa 1990.

- 
- [2] Blaug M., *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, PWN, Warszawa 2000.
- [3] Borkowska S. (red.), *Inwestowanie w kapitał ludzki*, GUS, PTE, Warszawa 2007.
- [4] Domański S.R., *Kapitał ludzki i wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa 1993.
- [5] Dziechciarz J., *Ekonometria – metody, przykłady, zadania*, PWE, Wrocław 2003.
- [6] *Edukacja w zarysie – 2007: wskaźniki OECD. Podsumowanie w języku polskim*, OECD 2007.
- [7] Florczak W., *Miary kapitału ludzkiego w badaniach ekonomicznych i społecznych*, „Wiadomości Statystyczne” 2006, nr 12, GUS, Warszawa.
- [8] Florczak W., Sabaty L., Welfe W., *Szacunek kapitału ludzkiego*, „Wiadomości Statystyczne” 2001, nr 5, GUS, Warszawa.
- [9] Gabryjelska A., Gadomski P., *Kapitał ludzki w krajach OECD – konwergencja czy dywergencja?*, [w:] S. Krajewski i L. Kucharski, *Transformacja, wzrost gospodarczy, restrukturyzacja i rynek pracy w Polsce. Ujęcie teoretyczne i empiryczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2004.
- [10] Gabryjelska A., Gadomski P., *Miary i konwergencja kapitału ludzkiego w krajach OECD*, „Ekonomista” 2004, nr 5, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Komitet Nauk Ekonomicznych PAN, Warszawa.
- [11] Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A., *Metody doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych*, PWN, Warszawa 1992.
- [12] *Human Development Report 2001*, Oxford University Press, New York 2001.
- [13] Jajuga K. (red.), *Ekonometria. Metody i analiza problemów ekonomicznych*, Wyd. AE Wrocław 1998.
- [14] Jarecki W., *Koncepcja kapitału ludzkiego*, źródło: <http://mikro.univ.szczecin.pl/bp/pdf/4/>.
- [15] *Kapitał ludzki w województwie dolnośląskim w latach 2002–2006*, Wyd. Urząd Statystyczny we Wrocławiu, 2008.
- [16] Kolenda M., *Taksonomia numeryczna. Klasyfikacja, porządkowanie i analiza obiektów wielo cechowych*, Wyd. AE, Wrocław 2006.
- [17] Liberda B., Tokarski, T., *Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy w krajach OECD*, „Gospodarka Narodowa” 2004, nr 3, GUS, Warszawa.
- [18] Młodak, A., *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Wyd. Difin, Warszawa 2006.
- [19] Nowak, E., *Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno-gospodarczych*, PWE, Warszawa 1990.
- [20] *Program Operacyjny „Kapitał ludzki”. Narodowe Strategiczne Ramy Odniesienia 2007–2013*, dokument przyjęty przez Radę Ministrów i zaakcep-

towany przez Komisję Europejską 9 września 2007 r., Ministerstwo Rozwoju Regionalnego, Warszawa 2007.

- [21] Roszkowska S., *Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy w ujęciu wojewódzkim*, „Wiadomości Statystyczne” 2005, nr 4, GUS, Warszawa 2006.
- [22] Stec M., Janas A., *Ranking krajów Unii Europejskiej ze względu na zasoby kapitału ludzkiego i intelektualnego*, „Wiadomości Statystyczne” 2005, nr 9, GUS, Warszawa.
- [23] Strahl D. (red.), *Metody oceny rozwoju regionalnego*, Wyd. AE, Wrocław 2006.
- [24] Strahl D. (red.), *Taksonomia struktur w badaniach regionalnych*, Wyd. AE Wrocław 1998.
- [25] Uramek K., *Taksonomiczne wskaźniki kapitału ludzkiego w wybranych krajach OECD*, „Wiadomości Statystyczne” 2006, nr 2, GUS, Warszawa.
- [26] Zeliaś A. (red.), *Ekonometria przestrzenna*, PWE, Warszawa 1991.
- [27] Zienkowski L. (red.), *Wiedza a wzrost gospodarczy*, Wyd. Naukowe Scholar, Warszawa 2003.

#### **Źródła danych statystycznych:**

- [28] *Aktywność Ekonomiczna Ludności Polski IV kwartał 2003, IV kwartał 2006*, GUS.
- [29] *Bank Danych Regionalnych*, GUS, Warszawa.
- [30] *Rocznik Demograficzny, 2004, 2007*, GUS, Warszawa.
- [31] *Rocznik Statystyczny Województw*, GUS, Warszawa 2004–2007.
- [32] *Rocznik Statystyczny Województwa: Dolnośląskiego; Małopolskiego; Opolskiego; Podkarpackiego; Śląskiego*; Urzędy Statystyczne, 2004–2007.

## **Summary**

### **Human Capital in the Southern Voivodships against Other Voivodships in Years 2003–2006**

The above publication presents a comparative analysis of the human capital in the southern voivodships against other voivodships basing on selected diagnostic indexes characterizing the five basic fields of human capital, i.e.: education, labour market, health, demographic potential and social and territorial cohesion. The above mentioned areas have been described by selected indexes calculated for years 2003 and 2006 on the basis of data gathered by the department of public statistics. In order to define a synthetic position of a particular voivodship against other units, and to indicate strengths and weaknesses of a unit, basing on the conception of Human Development Index (HDI), the taxonomic

measures of development have been used, i.e. general human capital measure and measures for each individual research field.

The intervoivodship comparative analysis carried out in this publication showed that the first three places in the ranking were taken by Mazowieckie voivodship, Pomorskie voivodship and Malopolskie voivodship, and Warmińsko-mazurskie voivodship and Świętokrzyskie voivodship were located as the last ones. Among southern voivodships relatively high positions were taken by Malopolskie, Dolnośląskie, and Śląskie voivodships (especially in 2003), while the rest, Opolskie and Podkarpackie voivodships were characterized by medium level of value of human capital measure. In each of the mentioned areas of the human capital both values of measures as well as locations of analyzed southern voivodships varied. There was a substantial gap in the values of locations taken by Śląskie and Opolskie voivodships in particular areas of the human capital.

The strengths of Opolskie and Podkarpackie and Śląskie voivodships included good locations in social cohesion while Dolnośląskie and Malopolskie voivodships were highly ranked in education and labour market. However, the weaknesses of Malopolskie and Śląskie voivodships were low locations in the area of health, and Dolnośląskie voivodship located low in the area of social and territorial cohesion, Opolskie voivodship in the area of demographic potential and education, Podkarpackie voivodship in the area of labour market.

## Załącznik

Tabl. 1. Finalny zestaw wskaźników diagnostycznych dla województw

<b>1. Edukacja</b>
<b><i>Struktura ludności według wykształcenia (BAEL)</i></b>
udział ludności z wykształceniem wyższym w ogólnej liczbie osób w wieku 15 lat i więcej (S)
udział ludności z wykształceniem gimnazjalnym, podstawowym ukończonym oraz podstawowym nieukończonym i bez wykształcenia szkolnego w ogólnej liczbie osób w wieku 15 lat i więcej (D)
<b><i>Kształcenie ustawiczne osób w wieku 25–64 lata (BAEL)</i></b>
udział osób uczących się i doksztalających się w ogólnej liczbie osób w wieku 25–64 lata (S)
<b><i>Kształcenie na wybranych poziomach edukacji</i></b>
liczba dzieci uczęszczających do placówek wychowania przedszkolnego na 100 dzieci w wieku 3–6 lat (S)
uczniowie w szkołach gimnazjalnych powtarzający klasę na 1000 uczniów (D)
współczynnik skolaryzacji brutto dla liceów ogólnokształcących (bez szkół dla dorosłych) (S)
liczba absolwentów szkół średnich zawodowych nieotrzymujących świadectwa dojrzałości na 100 absolwentów przystępujących do egzaminu dojrzałości (D)
liczba studentów studiów stacjonarnych na 100 osób w wieku 19–24 lata (S)
<b><i>Kierunki kształcenia</i></b>
odsetek uczniów kierunków matematycznych i technicznych w szkołach średnich zawodowych i zasadniczych zawodowych w ogólnej liczbie uczniów (S)
odsetek studentów kierunków matematycznych i technicznych w ogólnej liczbie studentów (S)
<b><i>Komputeryzacja</i></b>
liczba pracowni komputerowych na 100 szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży (S)
liczba pracowni komputerowych na 100 szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży (S)
udział komputerów przeznaczonych do użytku uczniów bez dostępu do Internetu w szkołach podstawowych dla dzieci i młodzieży w ogólnej liczbie komputerów (D)
udział komputerów przeznaczonych do użytku uczniów bez dostępu do Internetu w szkołach gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży w ogólnej liczbie komputerów (D)
liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży przypadająca na 1 komputer przeznaczony na użytek uczniów z dostępem do Internetu (D)
liczba uczniów liceów ogólnokształcących dla młodzieży przypadająca na 1 komputer przeznaczony na użytek uczniów z dostępem do Internetu (D)
<b><i>Nauka języków obcych</i></b>
liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży uczących się języka obcego jako przedmiotu dodatkowego na 100 uczniów (S)
liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży uczących się języka obcego jako przedmiotu dodatkowego na 100 uczniów (S)
liczba uczniów szkół średnich ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych dla dzieci i młodzieży uczących się języka obcego jako przedmiotu dodatkowego na 100 uczniów (S)

**Tabl. 1.** Finalny zestaw wskaźników... (cd.)

<b><i>Warunki lokalowe nauczania – pomieszczenia, oddziały, odległość szkoły od domu ucznia</i></b>
liczba uczniów szkół podstawowych dla dzieci i młodzieży mieszkających w odległości powyżej 5 km od szkoły na 1000 uczniów (D)
liczba uczniów szkół gimnazjalnych dla dzieci i młodzieży, mieszkających w odległości powyżej 5 km od szkoły na 1000 uczniów (D)
<b><i>Kadra nauczycielska</i></b>
liczba studentów przypadająca na 1 nauczyciela akademickiego (D)
udział profesorów w ogólnej liczbie nauczycieli akademickich (S)
<b><i>Otwartość systemu edukacji na świat</i></b>
liczba studentów zagranicznych na 1000 studentów (S)
<b><i>Inwestycje w edukację. Wydatki na oświatę i wychowanie</i></b>
wydatki budżetów jednostek samorządu terytorialnego na szkolnictwo podstawowe w przeliczeniu na 1 ucznia szkoły podstawowej podległej samorządowi terytorialnemu (S)
wydatki budżetów jednostek samorządu terytorialnego na szkolnictwo gimnazjalne w przeliczeniu na 1 ucznia gimnazjum podległego samorządowi terytorialnemu (S)
wydatki budżetów jednostek samorządu terytorialnego na licea ogólnokształcące w przeliczeniu na 1 ucznia liceum ogólnokształcącego podległego samorządowi terytorialnemu (S)
<b><i>Nauka i postęp techniczny</i></b>
liczba zatrudnionych w działalności badawczo-rozwojowej na 1000 osób aktywnych zawodowo (S)
nakłady na działalność innowacyjną na 1 mieszkańca (S)
liczba zgłoszonych wynalazków na 1 mln mieszkańców (S)
liczba nadanych stopni doktora i doktora habilitowanego na 1 mln mieszkańców (S)
<b>2. Rynek pracy</b>
<b><i>Aktywność ekonomiczna ludności – pracujący (BAEL)</i></b>
wskaźnik zatrudnienia w grupie osób w wieku 55 lat i więcej (S)
udział osób z wykształceniem wyższym w ogólnej liczbie osób pracujących (S)
różnica wskaźników: udział osób pracujących w ogólnej liczbie osób aktywnych zawodowo z wykształceniem wyższym i udział osób pracujących z wykształceniem gimnazjalnym i niższym (S)
<b><i>Aktywność ekonomiczna ludności – bezrobotni</i></b>
stopa bezrobocia rejestrowanego ogółem (D)
stopa bezrobocia osób z wykształceniem wyższym (BAEL) (D)
różnica wskaźników: udział zarejestrowanych bezrobotnych z wykształceniem wyższym i udział osób bezrobotnych z wykształceniem gimnazjalnym i niższym (D)
liczba ofert pracy na 1000 zarejestrowanych bezrobotnych (S)
<b><i>Aktywność ekonomiczna ludności – bezrobotni (dok.)</i></b>
różnica wskaźników: liczba nowo zarejestrowanych bezrobotnych (napływ) i bezrobotnych wyrejestrowanych (odpływ) na 100 zarejestrowanych bezrobotnych (D)
<b><i>Absolwenci na rynku pracy. Ruch zatrudnionych</i></b>
wskaźnik płynności rynku pracy (S)
udział absolwentów z wykształceniem wyższym w ogólnej liczbie absolwentów podejmujących pierwszą pracę (S)



**Tabl. 1.** Finalny zestaw wskaźników... (cd.)

różnica wskaźników: udział absolwentów z wykształceniem wyższym i udział absolwentów z wykształceniem zasadniczym w ogólnej liczbie absolwentów podejmujących pierwszą pracę (S)
współczynnik przyjęć do pracy (S)
wskaźnik wykorzystania wolnych miejsc pracy (S)
<b>Zawody osób pracujących (BAEL)</b>
udział specjalistów w ogólnej liczbie pracujących (S)
udział pracowników przy pracach prostych w ogólnej liczbie pracujących (D)
<b>Sektorowość rynku pracy</b>
udział pracujących w sektorze rolniczym w ogólnej liczbie pracujących (D)
<b>Przedsiębiorczość</b>
udział pracodawców i pracujących na własny rachunek w ogólnej liczbie pracujących (BAEL) (S)
liczba zarejestrowanych podmiotów gospodarki narodowej w rejestrze REGON na 1000 ludności (S)
udział nowo zarejestrowanych podmiotów gospodarki narodowej w rejestrze REGON wśród ogółu zarejestrowanych (S)
<b>Wydajność</b>
produkcja sprzedana przemysłu na 1 pracującego w przemyśle (S)
<b>Wynagrodzenia</b>
przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto (S)
przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto osób na stanowiskach nierobotniczych w relacji do wynagrodzenia osób na stanowiskach robotniczych (S)
<b>3. Zdrowie</b>
<b>Długość życia</b>
liczba osób w wieku 80 lat i więcej na 1000 ludności (S)
<b>Stan zdrowia</b>
przeciętna liczba osób, poza KRUS, pobierających renty z tytułu niezdolności do pracy na 1000 osób w wieku produkcyjnym (D)
liczba zachorowań na grypę na 100 tys. ludności (D)
zarejestrowani w poradniach dla osób z zaburzeniami psychicznymi, uzależnionych od alkoholu na 1000 ludności (D)
liczba zgonów, których przyczyną były choroby układu krążenia na 100 tys. ludności (D)
<b>Praca w warunkach zagrożenia zdrowia</b>
liczba zatrudnionych w warunkach zagrożenia na 1000 osób w wieku produkcyjnym (D)
liczba poszkodowanych w wypadkach przy pracy na 1000 osób w wieku produkcyjnym (D)
liczba wypadków śmiertelnych na 1000 wypadków przy pracy (D)
<b>Dostępność usług w ramach ochrony zdrowia</b>
liczba lekarzy na 10 tys. ludności (S)
liczba położnych na 10 tys. kobiet w wieku 15–49 lat (S)
liczba łóżek w szpitalach ogólnych na 10 tys. ludności (S)
przeciętna liczba ludności przypadająca na 1 aptekę (D)
liczba dzieci w żłobkach na 1000 dzieci w wieku 0–3 lat (S)
liczba miejsc w placówkach opieki społecznej na 1000 osób w wieku powyżej 65 lat (S)

**Tabl. 1.** Finalny zestaw wskaźników... (cd.)

<b><i>Wydatki na ochronę zdrowia i pomoc społeczną w budżecie jednostek samorządu terytorialnego</i></b>
wydatki budżetów jednostek samorządu terytorialnego na ochronę zdrowia w przeliczeniu na 1 mieszkańca (S)
wydatki budżetów jednostek samorządu terytorialnego na pomoc społeczną i pozostałe zadania w zakresie polityki społecznej na 1 mieszkańca (S)
<b>4. Potencjał demograficzny</b>
<b><i>Stan i struktura ludności</i></b>
współczynnik urbanizacji (S)
udział dzieci w wieku 0–14 lat w ogólnej liczbie ludności (S)
obciążenie ludności w wieku produkcyjnym ludnością w wieku poprodukcyjnym (S)
<b><i>Ruch naturalny. Reprodukcyjność</i></b>
współczynnik dynamiki demograficznej (S)
udział matek z wykształceniem wyższym w ogólnej liczbie kobiet rodzących (S)
udział matek niepracujących w ogólnej liczbie kobiet rodzących pierwsze dziecko (D)
umieralność osób w wieku 15–59 lat na 10 tys. ludności (D)
różnica wskaźników: udział zmarłych z wykształceniem wyższym w wieku 25–59 lat w ogólnej liczbie zmarłych z wykształceniem wyższym i udział zmarłych w wieku 25–59 lat w ogólnej liczbie zmarłych (D)
<b><i>Migracje</i></b>
napływ ludności przybyłej z innych województw na 10 tys. ludności (S)
obrót migracji wewnętrznych ludności na 10 tys. ludności (S)
saldo migracji międzywojewódzkich osób w wieku 20–44 lata na 10 tys. ludności w wieku 20–44 lata (S)
liczba emigrantów zagranicznych na 10 tys. ludności (D)
<b>5. Spójność społeczna i terytorialna</b>
<b><i>Osoby w trudnej sytuacji na rynku pracy (dok)</i></b>
udział bezrobotnych dotychczas niepracujących (bez stazu pracy) w ogólnej liczbie zarejestrowanych bezrobotnych (D)
<b><i>Niepełnosprawni</i></b>
liczba osób biernych zawodowo z powodu choroby, niesprawności na 1000 osób aktywnych i biernych zawodowo (BAEL) (D)
udział osób biernych zawodowo z powodu choroby, niesprawności w ogólnej liczbie osób biernych zawodowo (BAEL) (D)
udział osób niepełnosprawnych bezrobotnych w ogólnej liczbie zarejestrowanych bezrobotnych (D)
liczba ofert pracy dla osób niepełnosprawnych na 1000 zarejestrowanych bezrobotnych niepełnosprawnych (D)
<b><i>Przestępstwa stwierdzone</i></b>
przestępstwa stwierdzone w postępowaniu przygotowawczym na 10 tys. ludności (D)
dorośli skazani prawomocnie przez sądy powszechne na 10 tys. ludności (D)
<b><i>Zagrożenie ubóstwem</i></b>
odsetek osób w gospodarstwach domowych znajdujących się poniżej minimum egzystencji (D)

**Tabl. 1.** Finalny zestaw wskaźników... (cd.)

liczba osób korzystających ze świadczeń pomocy społecznej na 10 tys. ludności <b>(D)</b>
liczba mieszkańców placówek pomocy społecznej na 10 tys. osób <b>(D)</b>
liczba osób korzystających ze schronienia w ramach świadczeń pomocy społecznej na 10 tys. osób <b>(D)</b>
liczba sierot i półsierot wychowujących się w placówkach socjalizacyjnych, rodzinnych i interwencyjnych na 10 tys. osób w wieku 0–20 lat <b>(D)</b>
odsetek matek rodzących 4 i dalsze dziecko w ogólnej liczbie rodzących kobiet <b>(D)</b>
udział mieszkań bez łazienki w ogólnej liczbie mieszkań <b>(D)</b>
<b>Zróżnicowanie terytorialne</b>
współczynnik zmienności liczby dzieci w przedszkolach na 1000 dzieci w wieku 3–6 lat <b>(D)</b>
współczynnik zmienności stopy bezrobocia <b>(D)</b>
współczynnik zmienności udziału bezrobotnych w wieku 24 lata i mniej w ogólnej liczbie zarejestrowanych bezrobotnych <b>(D)</b>
współczynnik zmienności liczby zarejestrowanych podmiotów gospodarki narodowej w przeliczeniu na 1000 ludności <b>(D)</b>
współczynnik zmienności liczby zgonów, których przyczyną były nowotwory na 100 tys. ludności <b>(D)</b>
<b>Dystans wsi do miasta</b>
różnica wskaźników: liczba dzieci w przedszkolach na 1000 dzieci w wieku 3–6 lat w miastach i na wsi <b>(D)</b>
różnica wskaźników: udział mieszkań wyposażonych w łazienkę w ogólnej liczbie mieszkań w miastach i na wsi <b>(D)</b>
różnica wskaźników: liczba ludności przypadająca na 1 aptekę na wsi i w miastach <b>(D)</b>
różnica wskaźników: liczba osób biernych zawodowo z powodu choroby, niesprawności na 1000 osób aktywnych i biernych zawodowo na wsi i w miastach (BAEL) <b>(D)</b>
różnica wskaźników: udział matek rodzących 4 i dalsze dziecko w ogólnej liczbie rodzących kobiet na wsi i w miastach <b>(D)</b>

**(S)** – stymulanta, **(D)** – destymulanta

**Tabl. 5.** Mierniki kapitału ludzkiego województw południowych w 2003 i 2006 roku według wyróżnionych obszarów i zakresów

WYSZCZEGÓLNIENIE	Dolnośląskie			Małopolskie			Opolskie			Podkarpackie			Śląskie		
	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks
<b>KAPITAŁ LUDZKI</b>	<b>0,425</b>	<b>0,541</b>	<b>127,3</b>	<b>0,475</b>	<b>0,566</b>	<b>119,2</b>	<b>0,382</b>	<b>0,470</b>	<b>123,1</b>	<b>0,395</b>	<b>0,491</b>	<b>124,3</b>	<b>0,450</b>	<b>0,520</b>	<b>115,5</b>
<b>I. Edukacja</b>	<b>0,413</b>	<b>0,602</b>	<b>145,8</b>	<b>0,522</b>	<b>0,657</b>	<b>126,0</b>	<b>0,280</b>	<b>0,442</b>	<b>157,6</b>	<b>0,330</b>	<b>0,507</b>	<b>153,5</b>	<b>0,446</b>	<b>0,620</b>	<b>139,0</b>
Struktura ludności według wykształcenia (BAEL)	0,318	0,639	200,9	0,418	0,631	150,9	0,255	0,364	142,7	0,140	0,357	254,5	0,434	0,673	155,2
Kształcenie ustawiczne osób w wieku 25–64 lata (BAEL)	0,688	0,742	107,8	0,500	0,355	71,0	0,281	0,226	80,4	0,188	0,032	17,1	0,625	0,645	103,2
Kształcenie na wybranych poziomach edukacji	0,393	0,457	116,3	0,636	0,725	114,0	0,396	0,403	101,7	0,482	0,479	99,4	0,452	0,467	103,3
Kierunki kształcenia	0,522	0,486	93,1	0,696	0,626	89,9	0,266	0,400	150,3	0,565	0,451	79,8	0,605	0,599	99,0
Komputeryzacja	0,382	0,837	219,1	0,328	0,790	240,7	0,400	0,874	218,5	0,344	0,806	234,0	0,332	0,805	242,7
Nauka języków obcych	0,098	0,578	589,8	0,274	0,595	217,2	0,177	0,567	321,0	0,281	0,742	264,2	0,252	0,559	221,6
Warunki lokalowe nauczania	0,529	0,474	89,6	0,823	0,822	99,9	0,277	0,279	100,8	0,771	0,738	95,7	1,000	0,993	99,3
Kadra nauczycielska	0,439	0,479	109,1	0,524	0,539	102,8	0,540	0,594	110,0	0,254	0,386	152,3	0,323	0,413	128,0
Inwestycje w edukację. Wydatki na oświatę i wychowanie	0,490	0,541	110,4	0,416	0,330	79,4	0,486	0,177	36,4	0,343	0,095	27,7	0,405	0,319	78,7

Nauka i postęp techniczny	0,588	0,528	89,8	0,584	0,556	95,2	0,247	0,251	101,7	0,158	0,164	103,8	0,558	0,639	114,5
Otwartość systemu edukacji na świat	0,392	0,651	166,1	0,820	0,904	110,2	0,045	0,081	179,2	0,359	0,824	229,2	0,228	0,341	149,7
<b>2. Rynek pracy</b>	<b>0,406</b>	<b>0,569</b>	<b>140,1</b>	<b>0,350</b>	<b>0,529</b>	<b>151,0</b>	<b>0,326</b>	<b>0,394</b>	<b>121,0</b>	<b>0,318</b>	<b>0,347</b>	<b>109,1</b>	<b>0,383</b>	<b>0,510</b>	<b>133,2</b>
Aktywność ekonomiczna-pracujący (BAEL)	0,446	0,595	133,4	0,336	0,452	134,6	0,292	0,316	108,2	0,416	0,305	73,3	0,320	0,472	147,7
Aktywność ekonomiczna-bezrobotni	0,216	0,484	224,1	0,439	0,685	156,2	0,288	0,410	142,4	0,336	0,452	134,5	0,385	0,578	150,1
Absolwenci na rynku pracy. Ruch zatrudnionych	0,410	0,588	143,4	0,320	0,445	139,2	0,481	0,371	77,2	0,269	0,331	122,9	0,355	0,365	102,9
Zawody osób pracujących (BAEL)	0,544	0,656	120,6	0,393	0,804	204,4	0,402	0,504	125,5	0,642	0,522	81,3	0,554	0,670	120,9
Sektorowość rynku pracy	0,866	0,882	101,8	0,554	0,579	104,5	0,598	0,615	102,9	0,393	0,420	106,8	0,993	1,000	100,7
Przedsiębiorczość	0,387	0,523	135,1	0,432	0,504	116,7	0,178	0,237	133,5	0,352	0,384	109,0	0,186	0,260	139,8
Wydajność	0,147	0,432	293,9	0,108	0,319	295,0	0,153	0,353	231,1	0,014	0,134	934,6	0,174	0,451	258,8
Wynagrodzenia	0,250	0,395	158,0	0,260	0,442	170,3	0,223	0,346	155,2	0,127	0,226	177,8	0,150	0,288	191,6
<b>3. Zdrowie</b>	<b>0,375</b>	<b>0,574</b>	<b>153,1</b>	<b>0,412</b>	<b>0,552</b>	<b>134,1</b>	<b>0,348</b>	<b>0,515</b>	<b>147,9</b>	<b>0,357</b>	<b>0,549</b>	<b>153,7</b>	<b>0,296</b>	<b>0,406</b>	<b>137,2</b>
Długość życia	0,226	0,645	285,4	0,319	0,593	185,9	0,100	0,399	398,9	0,262	0,538	205,7	0,162	0,430	264,9
Stan zdrowia	0,419	0,511	122,0	0,560	0,663	118,4	0,754	0,772	102,3	0,385	0,590	153,1	0,385	0,505	131,2
Praca w warunkach zagrożenia zdrowia	0,514	0,518	100,8	0,771	0,689	89,3	0,534	0,576	107,9	0,697	0,685	98,3	0,278	0,198	71,2
Dostępność usług w ramach ochrony zdrowia	0,555	0,571	102,9	0,449	0,448	99,7	0,291	0,375	129,0	0,440	0,529	120,1	0,526	0,554	105,3

Tabl. 5. Mierniki kapitału... (cd.)

WYSZCZEGÓLNIENIE	Dolnośląskie			Małopolskie			Opolskie			Podkarpackie			Śląskie		
	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks	2003	2006	indeks
Wydatki na ochronę zdrowia i pomoc społeczną w budżecie jednostek samorządu terytorialnego	0,219	0,712	325,1	0,026	0,381	1479,4	0,079	0,408	513,8	0,035	0,446	1274,7	0,143	0,430	301,0
<b>4. Potencjał demograficzny</b>	<b>0,448</b>	<b>0,498</b>	<b>111,2</b>	<b>0,546</b>	<b>0,525</b>	<b>96,2</b>	<b>0,312</b>	<b>0,342</b>	<b>109,8</b>	<b>0,435</b>	<b>0,416</b>	<b>95,7</b>	<b>0,450</b>	<b>0,432</b>	<b>96,0</b>
Stan i struktura ludności	0,547	0,457	83,5	0,494	0,373	75,6	0,409	0,261	63,9	0,509	0,372	73,1	0,627	0,479	76,4
Ruch naturalny. Reprodukcja ludności	0,383	0,500	130,5	0,651	0,765	117,4	0,338	0,527	156,1	0,451	0,566	125,5	0,418	0,523	125,0
Migracje	0,331	0,550	166,2	0,394	0,453	115,0	0,151	0,197	130,7	0,275	0,273	99,3	0,243	0,272	111,8
<b>5. Spójność społeczna i terytorialna</b>	<b>0,484</b>	<b>0,462</b>	<b>95,5</b>	<b>0,544</b>	<b>0,566</b>	<b>104,0</b>	<b>0,643</b>	<b>0,656</b>	<b>102,0</b>	<b>0,536</b>	<b>0,635</b>	<b>118,5</b>	<b>0,677</b>	<b>0,631</b>	<b>93,2</b>
Osoby w trudnej sytuacji na rynku pracy	0,376	0,621	165,2	0,698	0,839	120,2	0,632	0,672	106,4	0,599	0,721	120,3	0,495	0,673	136,0
Niepełnosprawni	0,422	0,393	93,1	0,598	0,526	87,9	0,784	0,849	108,3	0,446	0,619	138,8	0,700	0,516	73,7
Przestępstwa stwierdzone	0,338	0,493	145,9	0,539	0,801	148,5	0,346	0,732	211,3	0,452	0,971	214,8	0,583	0,586	100,6
Zagrożenie ubóstwem	0,573	0,679	118,5	0,651	0,721	110,8	0,631	0,705	111,7	0,540	0,568	105,2	0,695	0,800	115,1
Zróżnicowanie terytorialne	0,666	0,540	81,1	0,416	0,380	91,4	0,754	0,732	97,0	0,611	0,630	103,1	0,696	0,652	93,7
Dystans wsi do miasta	0,681	0,613	90,0	0,603	0,509	84,4	0,810	0,776	95,8	0,555	0,493	88,9	0,971	0,998	102,8

Źródło: obliczenia na podstawie [15], [28–32]

**Tabl. 6.** Rangi województw południowych w 2003 i 2006 roku według wyróżnionych obszarów i zakresów kapitału ludzkiego

WYSZCZEGÓLNIENIE	Dolnośląskie			Małopolskie			Opolskie			Podkarpackie			Śląskie		
	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica
<b>KAPITAŁ LUDZKI</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>0</b>	<b>11</b>	<b>11</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>0</b>
<b>I. Edukacja</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>13</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0</b>
Struktura ludności według wykształcenia (BAEL)	6	3	3	3	4	-1	8	10	-2	14	12	2	2	2	0
Kształcenie ustawiczne osób w wieku 25–64 lata (BAEL)	2	2	0	6	8	-2	12	12	0	14	15	-1	4	5	-1
Kształcenie na wybranych poziomach edukacji	12	9	3	2	1	1	11	11	0	6	7	-1	8	8	0
Kierunki kształcenia	7	5	2	1	1	0	13	8	5	6	6	0	3	2	1
Komputeryzacja	4	3	1	11	11	0	3	2	1	7	9	-2	9	10	-1
Nauka języków obcych	15	10	5	6	9	-3	10	12	-2	5	5	0	7	13	-6
Warunki lokalowe nauczania	6	9	-3	2	2	0	13	13	0	3	3	0	1	1	0
Kadra nauczycielska	11	12	-1	7	7	0	5	6	-1	15	15	0	14	14	0
Inwestycje w edukację. Wydatki na oświatę i wychowanie	4	3	1	10	7	3	5	13	-8	15	15	0	11	9	2
Nauka i postęp techniczny	2	4	-2	3	3	0	10	12	-2	14	13	1	4	2	2
Otwartość systemu edukacji na świat	6	7	-1	3	4	-1	15	15	0	7	6	1	11	11	0

Tabl. 6. Rangi województw... (cd.)

WYSZCZEGÓLNIENIE	Dolnośląskie			Małopolskie			Opolskie			Podkarpackie			Śląskie		
	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica	2003	2006	różnica
<b>2. Rynek pracy</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>-2</b>	<b>10</b>	<b>14</b>	<b>-4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>-2</b>
Aktywność ekonomiczna – pracujący (BAEL)	4	2	2	11	7	4	15	15	0	6	16	-10	13	5	8
Aktywność ekonomiczna – bezrobotni	12	10	2	1	1	0	9	14	-5	8	12	-4	4	5	-1
Absolwenci na rynku pracy. Ruch zatrudnionych	6	2	4	15	6	9	2	14	-12	16	16	0	11	15	-4
Zawody osób pracujących (BAEL)	7	6	1	11	1	10	9	10	-1	2	9	-7	6	5	1
Sektorowość rynku pracy	2	2	0	11	11	0	8	8	0	13	13	0	1	1	0
Przedsiębiorczość	10	7	3	6	10	-4	16	16	0	13	14	-1	15	15	0
Wydajność	6	4	2	8	7	1	5	6	-1	15	14	1	3	3	0
Wynagrodzenia	5	4	1	4	2	2	10	8	2	16	16	0	14	13	1
<b>3. Zdrowie</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>1</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>-2</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>11</b>	<b>10</b>	<b>1</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>0</b>
Długość życia	10	6	4	6	7	-1	13	12	1	8	8	0	11	11	0
Stan zdrowia	9	15	-6	6	6	0	1	3	-2	13	11	2	14	16	-2
Praca w warunkach zagrożenia zdrowia	12	12	0	2	5	-3	10	11	-1	3	6	-3	16	16	0
Dostępność usług w ramach ochrony zdrowia	3	5	-2	8	9	-1	16	13	3	10	7	3	5	6	-1



Wydatki na ochronę zdrowia i pomoc społeczną w budżecie jednostek samorządu terytorialnego	4	3	1	16	16	0	12	14	-2	15	11	4	6	13	-7
<b>4. Potencjał demograficzny</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>1</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>0</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>1</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>-1</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>-1</b>
Stan i struktura ludności	8	8	0	10	9	1	12	13	-1	9	10	-1	7	7	0
Ruch naturalny. Reprodukcja ludności	11	11	0	2	2	0	14	7	7	5	5	0	7	8	-1
Migracje	9	6	3	8	9	-1	16	16	0	14	14	0	15	15	0
<b>5. Spójność społeczna i terytorialna</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>-2</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>-1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>-2</b>
Osoby w trudnej sytuacji na rynku pracy	14	12	2	1	1	0	2	8	-6	3	4	-1	12	7	5
Niepełnosprawni	13	13	0	5	7	-2	1	1	0	11	3	8	3	8	-5
Przestępstwa stwierdzone	13	15	-2	4	3	1	12	8	4	9	1	8	1	12	-11
Zagrożenie ubóstwem	6	6	0	4	4	0	5	5	0	11	11	0	3	1	2
Zróżnicowanie terytorialne	5	9	-4	15	14	1	2	2	0	6	6	0	3	4	-1
Dystans wsi do miasta	4	7	-3	7	10	-3	2	2	0	9	11	-2	1	1	0

Źródło: obliczenia na podstawie [15], [28–32]



Witold Miszczak  
Walenty Ostasiewicz

## Mieszanki rozkładów

### 1. Elementarne wprowadzenie

Rozpatrzmy proste zdanie.

Mamy 10 monet, w tym jest 8 prawidłowych, a 2 są zniekształcone. Przy losowym podrzucaniu jedną monetą mamy następujące rozkłady:

$$P(\text{orzeł} \mid \text{prawidłowa}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{reszka} \mid \text{prawidłowa}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{orzeł} \mid \text{zniekształcona}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{reszka} \mid \text{zniekształcona}) = \frac{2}{3}$$

Na przestrzeni zdarzeń elementarnych {orzeł, reszka} określimy dwie zmienne losowe:

$$Y, X: \{\text{orzeł}, \text{reszka}\} \rightarrow \{0,1\}$$

w następujący sposób:

$$X(\text{orzeł}) = 0, \quad X(\text{reszka}) = 1,$$

$$Y(\text{orzeł}) = 0, \quad Y(\text{reszka}) = 1.$$

Rozkłady prawdopodobieństwa tych zmiennych są następujące:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = 1 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{gdy } y = 0 \\ \frac{1}{3}, & \text{gdy } y = 1 \end{cases}$$

Zmieszajmy wszystkie monety i określmy zmienną losową  $Z$ :  $\{\text{orzeł, reszka}\} \rightarrow \{0,1\}$  której rozkład jest następującą mieszanką dwóch rozkładów:

$$f_Z(x) = \frac{8}{10} f_X(x) + \frac{2}{10} f_Y(x)$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}, & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3}, & \text{gdy } x = 1 \end{cases}$$

Dla większej przejrzystości przedstawmy tę mieszankę następująco:

$$\frac{8}{10} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} + \frac{2}{10} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \\ \hline \end{array}$$

Widzimy, że „zmieszać” dwa rozkłady jest dość łatwo i sens mieszanki dwóch rozkładów łatwo jest zrozumieć na podstawie prostego eksperymentu losowego.

O wiele trudniejszy jest problem odwrotny, polegający na tym, że dany jest jakiś rozkład, o którym wiadomo, że jest mieszanką i trzeba wyodrębnić składowe tej mieszanki.

Zauważmy przede wszystkim, że zadanie takie nie ma jednoznacznego rozwiązania. Istotę tego problemu rozpatrzmy na prostym przykładzie rozkładu zero-jedynkowego.

Dana jest pewna populacja polityków i wiadomo, że nie jest ona jednorodna. Na przykład wiadomo, że są to jastrzębie i gołębie lub że są to zieloni i czerwoni, wierni i niewierni itp. Przyjmijmy, że udział pierwszej podpopulacji oznaczony będzie symbolem  $\alpha$ , zaś szansa wylosowania osobnika należącego do tej podpopulacji oznaczona będzie jako  $\theta_1$ . Funkcję rozkładu prawdopodobieństwa w całej populacji można więc przedstawić następująco:

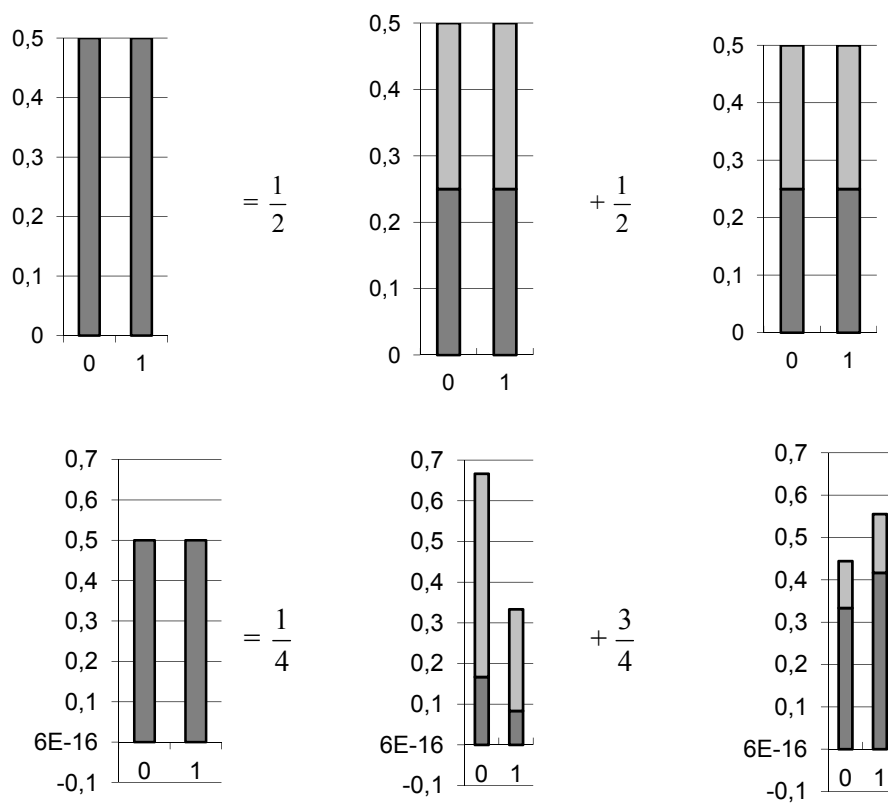
$$f_Z(z, \theta) = \alpha f_X(x, \theta_1) + (1 - \alpha) f_Y(y, \theta_2)$$

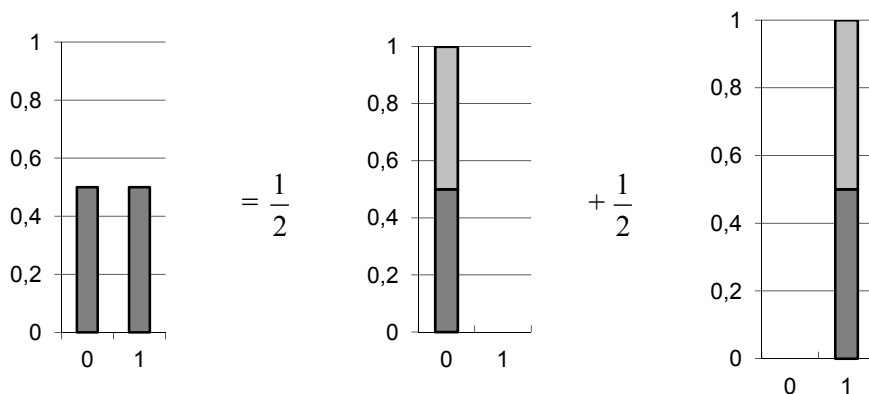
gdzie

$$f_X(x; \theta_1) = \begin{cases} \theta_1, & \text{jeśli } x=0 \\ 1-\theta_1 & \text{jeśli } x=1 \end{cases} \quad f_Y(y; \theta_2) = \begin{cases} \theta_2, & \text{jeśli } y=0 \\ 1-\theta_2 & \text{jeśli } y=1 \end{cases}$$

Problem polega na tym, aby określić prawdopodobieństwo  $\theta_1$  i  $\theta_2$  oraz strukturę populacji, tzn. parametr  $\alpha$ .

Istnieje wiele możliwych rozwiązań. Trzy rozwiązania przedstawiają poniższe rysunki:





Na rysunkach po lewej stronie mamy ten sam rozkład, a po prawej różne rozkłady przedstawione za pomocą wykresu kolumnowego. Cała kolumna oznacza prawdopodobieństwo dla danego  $x$  w rozkładzie będącym składnikiem mieszanki. Zawarta w niej ciemniejsza kolumna oznacza tę część prawdopodobieństwa w danym rozkładzie  $\alpha P(X = x)$ , która wchodzi do mieszanki rozkładów. Z powyższego widzimy, że nie ma rozwiązania jednoznacznego.

Rozpatrzmy teraz przykład związany z rozkładem dwumianowym.

Załóżmy, że grupa  $n$  osób spotyka się regularnie w każdy czwartek, 15 razy w ciągu jednego semestru. Korzystając z prawa gwarantowanego przez demokrację, grupa ta przed każdym spotkaniem decyduje poprzez głosowanie, czy jakaś osoba ma wygłosić referat, czy też nie. Liczbę głosów za tym, aby wykład się odbył w  $i$ -tym tygodniu, oznaczmy symbolem  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 15$ .

Po zakończeniu semestru znane są wyniki w postaci wektora  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_{15})$ , gdzie  $k_i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Ponieważ na wynik głosowania mogą mieć wpływ różne czynniki losowe, takie jak: niewyspana noc, nieudana randka, przejedzenie itp., wektor  $\mathbf{k}$  potraktujemy jako 15 realizacji zmiennej losowej  $K$ .

Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo głosowania „za” oznaczone jest symbolem  $\theta$ . Wówczas możemy traktować zmienną losową  $K$  jako zmienną o rozkładzie dwumianowym  $K \sim B(n, \theta)$ . Oznaczmy funkcję rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej w postaci  $B(k; n, \theta)$ , tzn.:

$$B(k; n, \theta) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Niezależnie od wymienionych zakłóceń losowych cała grupa może stanowić jednorodną i zwartą społeczność, może też być podzielona na pewne klasy lub kliki.

Oznaczmy liczbę klas symbolem  $c$ , czyli w przypadku grupy jednorodnej mamy  $c = 1$ , zaś w drugim przypadku ekstremalnym, gdy grupa składa się tylko z samolubów, mamy  $c = n$ .

Zadanie, jakie tu jest rozwiązywane, polega na tym, aby na podstawie obserwacji zmiennej losowej  $K$ :

$$k_1 k_2, \dots, k_{15}$$

zidentyfikować klasy, z jakich się składa cała grupa.

Rozpatrzmy zadanie możliwie najprostsze, przyjmując, że w grupie są dwie frakcje, np. gołębi i jastrzębi lub doświadczonych i nieopierzonych itp. Przyjmijmy ponadto, że osoby pierwszej klasy z prawdopodobieństwem  $q_1$  głosują „za”, osoby z drugiej klasy głosują „za” z prawdopodobieństwem  $\theta_2$ .

Oznacza to, że osoby należące do klasy pierwszej postępują zgodnie z rozkładem  $B(n, q_1)$ , zaś osoby z klasy drugiej głosują zgodnie z rozkładem  $B(n, q_2)$ .

Przyjmijmy na koniec, że do pierwszej klasy należy 100  $\alpha_1$ % osób, zaś do klasy drugiej 100  $\alpha_2$ %, przy czym  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  oraz  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ .

Przyjęte wyżej założenia oznaczają, że cała grupa jest „mieszkanką” dwóch klas. To z kolei oznacza, że obserwowana funkcja rozkładu  $B(k; n, \theta)$  jest mieszkanką dwóch rozkładów:

$$B(k; n, \theta) = \alpha_1 \cdot B(k; n, \theta_1) + \alpha_2 B(k; n, \theta_2) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Sformułowane wyżej zadanie identyfikacji klas oznacza teraz, w ujęciu probabilistycznym, estymację parametrów  $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1$  i  $\theta_2$ . Ponieważ  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , to zadanie polega ma estymacji trzech parametrów:  $\alpha_1, \theta_1, \theta_2$ .

W celu uproszczenia zapisów, zamiast  $\alpha_1$  stosowany będzie symbol  $\alpha$ .

Zadanie polega na estymacji parametrów funkcji rozkładu prawdopodobieństwa:  $B(k; n, q)$ .

Załóżmy, że w grupie są tylko dwie osoby, tzn.  $n = 2$ .

W celu identyfikacji klas należy wówczas rozwiązać następujący układ równań:

$$B(0; 2, \theta) = \alpha B(0; 2, \theta_1) + (1 - \alpha) B(0; 2, \theta_2)$$

$$B(1; 2, \theta) = \alpha B(1; 2, \theta_1) + (1 - \alpha) B(1; 2, \theta_2)$$

$$B(2; 2, \theta) = \alpha B(2; 2, \theta_1) + (1 - \alpha) B(2; 2, \theta_2)$$

względem niewiadomych  $\alpha, \theta_1$  i  $\theta_2$ .

Korzystając z definicji funkcji rozkładu dwumianowego, układ ten zapisać można następująco:

$$B(0;2,\theta) = \alpha(1-\theta_1)^2 + (1-\alpha)(1-\theta_2)^2$$

$$B(1;2,\theta) = \alpha 2\theta_1(1-\theta_1) + (1-\alpha)2(1-\theta_2)$$

$$B(2;2,\theta) = \alpha\theta_1^2 + (1-\alpha)\theta_2^2$$

Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^n B(k;n,\theta) = \sum_{k=0}^n C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} = 1$$

czyli w powyższym układzie trzech równań z trzema niewiadomymi jedno równanie zależy liniowo od dwóch pozostałych. Oznacza to, że układ powyższy nie ma jednoznacznego rozwiązania. Klasy są nieidentyfikowalne.

Rozpatrzmy więc przypadek, gdy  $n > 2$ .

Załóżmy, iż wiadomo, że liczba podpopulacji jest znana, oznaczmy ją symbolem  $c$ .

Rozkład analizowanej cechy w każdej podpopulacji jest taki sam z dokładnością do parametrów.

Oznaczmy go symbolem  $f(x;\theta)$ , gdzie  $\theta$  jest tym parametrem. W dalszej części opracowania przyjmuje się, że jest on skalarem.

Rozkład w całej populacji jest następującą mieszanką:

$$f(x;\eta) = \sum_{i=1}^c \alpha_i \cdot f(x;\theta_i)$$

gdzie  $\eta = (\alpha_1, \dots, \alpha_c, \theta_1, \dots, \theta_c)$ .

Ponieważ  $\alpha_i \geq 0$  oraz  $\sum_{i=1}^c \alpha_i = 1$ , to wektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_c)$ , można interpretować jako rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni  $\Theta$ , tak że

$$\alpha_i = P(\tilde{\theta} = \theta_i).$$

Do estymacji składowych wektora  $\eta$  stosowane są różne metody.

W kolejnych paragrafach dokładnie omówione są dwie z nich:

- 1) metoda największej wiarygodności,
- 2) metoda momentów.



## 2. Metoda największej wiarygodności

Założmy, że dane są obserwacje

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

zmiennej losowej  $X$ , której funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest  $f(x)$ .

Funkcja wiarygodności tych obserwacji jest następująca:

$$L(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_c, \theta_1, \dots, \theta_c) = \prod_{j=1}^n f(x_j) = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^c \alpha_i f(x_j; \theta_i).$$

Oznaczmy jej logarytm jako  $l$ , tzn.:

$$l = \log L(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_c, \theta_1, \dots, \theta_c).$$

Ponieważ nieznane parametry  $\alpha_i$  muszą spełniać warunek

$$\sum_{i=1}^c \alpha_i - 1 = 0,$$

to maksymalizacji funkcji  $l$  dokonujemy za pomocą metody mnożników Lagrange'a. Funkcję, którą trzeba maksymalizować, oznaczmy tym samym symbolem. Ma więc ona następującą postać:

$$l = \log \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^c \alpha_i f(x_j; \theta_i) - \lambda \left( \sum_{i=1}^c \alpha_i - 1 \right)$$

gdzie  $\lambda$  jest to mnożnik Lagrange'a.

W celu określania nieznanymi parametrów trzeba więc rozwiązać następujący układ równań:

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = 0$$

Rozwińmy lewe strony pierwszego zestawu równań:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial \left[ \log \prod_{j=1}^n f(x_j) - \lambda \left( \sum_{j=1}^c \alpha_j - 1 \right) \right]}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \log \prod_{j=1}^n f(x_j)}{\partial \alpha_i} - \lambda = \\
&= \frac{\partial \sum_{j=1}^n \log f(x_j)}{\partial \alpha_i} - \lambda = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \log f(x_j)}{\partial \alpha_i} - \lambda = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j)} \cdot \frac{\partial f(x_j)}{\partial \alpha_i} - \lambda = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j)} \cdot \frac{\partial \sum_{k=1}^c \alpha_k \cdot f_k(x_j; \theta_k)}{\partial \alpha_i} - \lambda = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j)} \cdot f_i(x_j; \theta_i) - \lambda = \sum_{j=1}^n \frac{f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} - \lambda
\end{aligned}$$

Podobnie przedstawione są rozwinięcie lewej strony drugiego zestawu równań

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \left[ \log \prod_{j=1}^n f(x_j) - \lambda \left( \sum_{k=1}^c \alpha_k - 1 \right) \right]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \log \prod_{j=1}^n f(x_j)}{\partial \theta_i} = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \log f(x_j)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j)} \cdot \frac{\partial f(x_j)}{\partial \theta_i} = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j)} \cdot \frac{\partial \sum_{k=1}^c \alpha_k \cdot f(x_j; \theta_k)}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j)} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial f_i(x_j; \theta_i)}{\partial \theta_i}
\end{aligned}$$

W celu określenia parametrów  $\alpha_i$  oraz  $\theta_i$  należy rozwiązać następujący układ dwóch zestawów równań:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} &= \lambda, \quad i=1, 2, \dots, c \\
\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_i}{f(x_j)} \frac{\partial f_i(x_j; \theta_i)}{\partial \theta_i} &= 0, \quad i=1, 2, \dots, c
\end{aligned}$$

Mnożąc stronami równania pierwszego zestawu przez  $\alpha_i$  i sumując po wszystkich  $i$ , uzyskujemy:

$$\sum_{i=1}^c \alpha_i \sum_{j=1}^n \frac{f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} = \sum_{i=1}^c \alpha_i \cdot \lambda$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\sum_{i=1}^c \alpha_i f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{f(x_j)} = \sum_{j=1}^n 1 = n = \lambda$$

W ten sposób został wyznaczony nieokreślony mnożnik Lagrange'a. Korzystając z tego, że  $\lambda = n$ , pierwsze równanie można zapisać następująco:

$$\sum_{j=1}^n \frac{f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} = n, \quad i = 1, 2, \dots, c$$

Pomnóżmy je stronami przez  $\alpha_i$  i uzyskamy

$$\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_i f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} = \alpha_i n$$

Ponieważ udziały  $\alpha_i$  mieszanki rozkładów traktujemy jako następujące prawdopodobieństwo:

$$\alpha_i = P(\tilde{\theta} = \theta_i),$$

to uzyskujemy następujące równanie:

$$\sum_{j=1}^n \frac{P(\tilde{\theta} = \theta_i) \cdot f_i(x_j; \theta_i)}{f(x_j)} = \alpha_i \cdot n$$

Zamiast oznaczenia  $P(\tilde{\theta} = \theta_i)$  wprowadźmy proste oznaczenie  $p_i$  oznaczające w dalszym ciągu prawdopodobieństwo przynależności dowolnej obserwacji do  $i$ -tej podpopulacji (klasy). Przedstawmy teraz powyższe równanie w postaci:

$$\sum_{j=1}^n \frac{f(x_j | i) \cdot p_i}{f(x_j)} = \alpha_i n$$

Bez większego trudu rozpoznajemy pod znakiem sumy wzór Bayesa:

$$P(i | x_j) = \frac{f_i(x_j | i) p_i}{f(x_j)}$$

Korzystając z twierdzenia Bayesa, ostatecznie otrzymujemy następujące równanie:

$$\sum_{j=1}^n P(i | x_j) = \alpha_i n$$

gdzie  $P(i | x_j)$  oznacza prawdopodobieństwo, że obserwacja  $x_j$  należy do  $i$ -tej podpopulacji ( $i$ -tej klasy). Dzieliąc stronami to równanie przez  $n$ , wyznaczamy nieznaną wielkość  $\alpha_i$ , którą traktujemy jako estymator parametru  $\alpha_i$ .

Jako estymator parametru  $\alpha_i$  przyjmiemy następujące wyrażenie:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(i | x_j)$$

W celu uzyskania wyrażenia określającego estymatory parametrów  $\theta_i$  przedstawmy drugi zestaw równań w postaci:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_i}{f(x_j)} \cdot f_i(x_j; \theta_i) \cdot \frac{\partial \log f_i(x_j; \theta_i)}{\partial \theta_i} = 0$$

Korzystając ponownie w podobny sposób z twierdzenia Bayesa, uzyskujemy:

$$\sum_{j=1}^n P(i | x_j) \frac{\partial \log f_i(x_j; \theta_i)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, c.$$

Estymatory  $\hat{\theta}_i$  parametrów  $\theta_i$  uzyskujemy jako rozwiązania układu równań, do którego należy podstawić konkretne postaci  $f_i(x; \theta_i)$ .

Rozpatrzmy konkretny przykład liczbowy w przypadku mieszanki dwóch rozkładów dwumianowych. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa jest również następująca:

$$f(k; \alpha, \theta_1, \theta_2) = \alpha C_m^k \theta_1^k (1 - \theta_1)^{m-k} + (1 - \alpha) C_m^k \theta_2^k (1 - \theta_2)^{m-k}$$

Funkcja wiarygodności próby

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

jest następująca:

$$L(k_1, k_2, \dots, k_n; \alpha, \theta_1, \theta_2) = \prod_{j=1}^n f(k_j, \alpha, \theta_1, \theta_2).$$

Estymator parametru  $\alpha$  określany jest następująco:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{P}(1|k_i)$$

gdzie  $\hat{P}(1|k_j)$  oznacza estymator prawdopodobieństwa tego, że obserwacja  $k_j$  pochodzi z pierwszej klasy. Zgodnie z twierdzeniem Bayesa mamy:

$$\hat{P}(1|k_i) = \frac{\hat{\alpha} C_m^{k_i} \hat{\theta}_1^{k_i} (1 - \hat{\theta}_1)^{m-k_i}}{\hat{\alpha} C_m^{k_i} \hat{\theta}_1^{k_i} (1 - \hat{\theta}_1)^{m-k_i} + (1 - \hat{\alpha}) C_m^{k_i} \hat{\theta}_2^{k_i} (1 - \hat{\theta}_2)^{m-k_i}}$$

Estymatory  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$  określone są następująco:

$$\sum_{j=1}^n P(1|k_j) \cdot \frac{\partial \log C_m^{k_j} \hat{\theta}_1^{k_j} (1 - \hat{\theta}_1)^{m-k_j}}{\partial \hat{\theta}_1} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n P(2|k_j) \cdot \frac{\partial \log C_m^{k_j} \hat{\theta}_2^{k_j} (1 - \hat{\theta}_2)^{m-k_j}}{\partial \hat{\theta}_2} = 0$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log C_m^k \theta^k (1 - \theta)^{m-k}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \log C_m^k + k \log \theta + (m - k) \log(1 - \theta)}{\partial \theta} = \\ &= k \frac{1}{\theta} - \frac{m - k}{1 - \theta} = \frac{k(1 - \theta) - (m - k)\theta}{\theta(1 - \theta)} = \frac{k - m\theta}{\theta(1 - \theta)} \end{aligned}$$

Stąd też równania powyższe przyjmują następującą postać:

$$\sum_{j=1}^n \left[ P(1|k_j) \frac{k_j - m\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1(1 - \hat{\theta}_1)} \right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ P(2|k_j) \frac{k_j - m\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_2(1 - \hat{\theta}_2)} \right] = 0$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez  $\hat{\theta}_1(1 - \hat{\theta}_1)$ , a drugie przez  $\hat{\theta}_2(1 - \hat{\theta}_2)$  i zapiszmy te równania w następującej postaci:

$$\sum_{j=1}^n P(1|k_j) k_j = m \hat{\theta}_1 \sum_{j=1}^n P(1|k_j)$$

$$\sum_{j=1}^n P(2|k_j) k_j = m \hat{\theta}_2 \sum_{j=1}^n P(2|k_j)$$

Rozwiązanie tego układu równań uzyskujemy bardzo łatwo, a mianowicie dzieląc stronami oba równania przez  $m \cdot n$ , ostatecznie otrzymujemy:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{m} \frac{\sum_{j=1}^n P(1|k_j) k_j}{\sum_{j=1}^n P(1|k_j)} = \frac{1}{m} \bar{k}_1$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{m} \frac{\sum_{j=1}^n P(2|k_j) k_j}{\sum_{j=1}^n P(2|k_j)} = \frac{1}{m} \bar{k}_2$$

gdzie średnie  $\bar{k}_1$  są średnimi ważonymi liczby sukcesów dla pierwszego składnika mieszanki, a  $\bar{k}_2$  dla drugiego składnika. Bezpośrednie korzystanie z tych wzorów w celu obliczenia wartości estymatorów  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$  jest niemożliwe, gdyż do obliczenia na przykład  $\hat{\alpha}$  potrzebna jest znajomość wartości  $\hat{P}(1|k_j)$ , z kolei do obliczania  $\hat{P}(1|k_j)$  potrzebna jest znajomość  $\hat{\alpha}$ . Trudność obliczeniową omija się, stosując iteracyjnie kolejne przybliżenia potrzebnych wartości.

Rozpatrzmy sposób takiego postępowania na fragmentarycznym przykładzie. Załóżmy, że rozkład zmiennej losowej  $K$  jest mieszanką dwóch rozkładów dwumianowych:

$$f(k; \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2) = \alpha_1 C_m^k \theta_1^k (1 - \theta_1)^{m-k} + \alpha_2 C_m^k \theta_2^k (1 - \theta_2)^{m-k}$$

przy czym

$$m = 20$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \theta_1 = \frac{4}{5}, \theta_2 = \frac{3}{5}$$

Założmy, że parametry rozkładu nie są znane, znamy zaś następujące obserwacje:

$$2, 3, 8, 12, 15, 1, 9, 3, 19.$$

W celu obliczenia wartości estymatorów parametrów  $\alpha_1, \alpha_2, \theta_1$  i  $\theta_2$ , przyjmijmy następujące wartości początkowe:

$$\alpha_1^{(0)} = 0,2, \theta_1^{(0)} = 0,5, \theta_2^{(0)} = 0,6$$

Na ich podstawie obliczymy wartości

$$\alpha_1^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}$$

w sposób następujący:

$$\hat{P}^{(1)}(1|k_1) = \frac{0,2C_{20}^2 0,5^2 0,5^{18}}{0,2C_{20}^2 0,5^2 0,5^{18} + 0,8C_{20}^2 0,6^2 0,4^{18}} = \frac{0,000036}{0,00004} = 0,906$$

$$\hat{P}^{(1)}(1|k_2) = \frac{0,2C_{20}^3 0,5^3 0,5^{17}}{0,2C_{20}^3 0,5^3 0,5^{17} + 0,8C_{20}^3 0,6^3 0,4^{17}} = \frac{0,00022}{0,00025} = 0,8653$$

$$\hat{P}^{(1)}(1|k_3) = \frac{0,2C_{20}^8 0,5^8 0,5^{12}}{0,2C_{20}^8 0,5^8 0,5^{12} + 0,8C_{20}^8 0,6^8 0,4^{12}} = \frac{0,024}{0,0524} = 0,4532$$

Pozostałe wartości  $\hat{P}^{(1)}(1|k_j)$  są równe odpowiednio: 0,1432, 0,0472, 0,9353, 0,3606, 0,8653 i 0,0097.

Po obliczeniu tych wartości, obliczamy wartości  $\hat{\alpha}^{(1)}$  i  $\hat{\alpha}^{(2)}$ :

$$\hat{\alpha}_1^{(1)} = \frac{1}{9}(\hat{P}^{(1)}(1|k_1) + \dots + \hat{P}^{(1)}(1|k_9)) = \frac{4,5909}{9} = 0,5101$$

oraz wartości  $\hat{\theta}_1^{(1)}$  i  $\hat{\theta}_2^{(1)}$

$$\hat{\theta}_1^{(1)} = \frac{1}{20} \frac{2\hat{P}^{(1)}(1|k_1) + \dots + 19\hat{P}^{(1)}(1|k_9)}{\hat{P}^{(1)}(1|k_1) + \dots + \hat{P}^{(1)}(1|k_9)} = \frac{17,4615}{20 \cdot 4,5909} = 0,1902$$

$$\hat{\theta}_2^{(1)} = \frac{1}{20} \frac{2\hat{P}^{(1)}(2|k_1) + \dots + 19\hat{P}^{(1)}(2|k_9)}{\hat{P}^{(1)}(2|k_1) + \dots + \hat{P}^{(1)}(2|k_9)} = \frac{1}{20} \frac{2\hat{P}^{(1)}(2|k_1) + \dots + 19\hat{P}^{(1)}(2|k_9)}{9 - \hat{P}^{(1)}(1|k_1) - \dots - \hat{P}^{(1)}(1|k_9)}$$

gdzie  $P(2|k_j) = 1 - P(1|k_j)$ . Stąd  $\hat{\theta}_2^{(1)} = \frac{54,5385}{20 \cdot 4,4091} = 0,6185$ .

Obliczone wartości  $\hat{\alpha}_1^{(1)}$ ,  $\hat{\alpha}_2^{(1)}$ ,  $\hat{\theta}_1^{(1)}$ , i  $\hat{\theta}_2^{(1)}$  wykorzystujemy do obliczenia wartości  $\hat{\alpha}_1^{(2)}$ ,  $\hat{\alpha}_2^{(2)}$ ,  $\hat{\theta}_1^{(2)}$ ,  $\hat{\theta}_2^{(2)}$ .

Procedurę powtarzamy tak długo aż kolejne przybliżenia  $|P^{(r)}(i|k_j) - P^{(r-1)}(i|k_j)|$  będą się różniły nie więcej niż zadana wcześniej mała liczba  $\varepsilon > 0$ , tzn.

$$\max_{i,j} |P^{(r)}(i|k_j) - P^{(r-1)}(i|k_j)| < \varepsilon,$$

gdzie  $r$  oznacza numer iteracji obliczeń.

### 3. Idea metody momentów

Istota tej metody polega na tym, że trzeba określić pewną funkcję „teoretyczną”, której argumentami są oceniane parametry. Oznaczmy ją jako  $\Phi(\eta)$ . Oprócz tego trzeba określić jej odpowiednik empiryczny, którego argumentami są zaobserwowane wartości zmiennej losowej. Oznaczmy tę statystykę jako  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Estymacji parametru  $\eta$  dokonujemy poprzez „rozwiązanie” następującego równania:

$$\Phi(\eta) = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

względem niewiadomej  $\eta$ .

Symbolicznie zapiszmy więc w postaci:

$$\hat{\eta} = \Phi^{-1}(T(X_1, X_2, \dots, X_n))$$

Zamiast rozwiązywania równania, można minimalizować pewną funkcję błędu:

$$\Delta = \Delta(\Phi(\eta) - T(X_1, X_2, \dots, X_n))$$

Jeden z prostszych sposobów takiego postępowania polega na tym, że funkcje  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  definiowane są jako momenty empiryczne, w ten sposób aby

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k = E(X^k).$$

Przedstawiony wyżej ogólny schemat postępowania rozpatrzmy na konkretnym przykładzie mieszanki dwóch rozkładów dwumianowych.

W przypadku zmiennych losowych typu dyskretnego, szczególnie tych o charakterze dwumianowym, zamiast momentów „addytywnych” postaci

$$\mu_k = E(X^k) = \sum x_i^k p_i$$

wygodniejsze są tzw. momenty multiplikatywne.

Momentem multiplikatywnym rzędu  $k$  nazywa się wyrażenie:



$$\mu_k = \sum_i x_i^{[k]} p_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

gdzie

$$x_i^{[k]} = x_i(x_i - 1) \dots (x_i - k + 1).$$

Trzy kolejne momenty tego typu względem zera są więc następujące:

$$\mu_1 = \sum x_i p_i$$

$$\mu_2 = \sum x_i(x_i - 1)p_i$$

$$\mu_3 = \sum x_i(x_i - 1)(x_i - 2)p_i$$

Na podstawie próby losowej  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  momenty empiryczne określa się następująco:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_i X_i^{[k]}.$$

Rozpatrzmy mieszanke dwóch rozkładów dwumianowych

$$f(x, \eta) = \alpha_1 B(x; m, \theta_1) + \alpha_2 B(x; m, \theta_2)$$

gdzie

$$B(x; m, \theta) = C_m^x \theta^x (1 - \theta)^{m-x}, \quad x = 0, 1, \dots, m$$

Dokonyamy estymacji parametrów  $\eta = (\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2)$  metodą momentów, korzystając z próby prostej  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Określmy trzy pierwsze momenty empiryczne:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{[k]}, \quad k = 1, 2, 3$$

Można sprawdzić, że

$$\mu_1 = m(\alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2)$$

$$\mu_2 = m(m-1)(\alpha_1 \theta_1^2 + \alpha_2 \theta_2^2)$$

$$\mu_3 = m(m-1)(m-2)(\alpha_1 \theta_1^3 + \alpha_2 \theta_2^3)$$

Porównując momenty empiryczne z teoretycznymi, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n x_i &= \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 \\ \frac{1}{nm(m-1)} \sum_{i=1}^n x_i(x_i-1) &= \alpha_1 \theta_1^2 + \alpha_2 \theta_2^2 \\ \frac{1}{nm(m-1)(m-2)} \sum_{i=1}^n x_i(x_i-1)(x_i-2) &= \alpha_1 \theta_1^3 + \alpha_2 \theta_2^3\end{aligned}$$

Ten układ trzech równań trzeba rozwiązać względem trzech niewiadomych  $\alpha_1, \theta_1$  i  $\theta_2$  gdyż  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ .

W celu uproszczenia zapisów przyjmijmy, że lewe strony oznaczone będą symbolami  $l_1, l_2$  i  $l_3$ , zaś zamiast  $\alpha_1$  stosowany będzie symbol  $\alpha$  i w konsekwencji  $\alpha_2 = 1 - \alpha$ . Powyższy układ równań przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}l_1 &= \alpha \theta_1 + (1 - \alpha) \theta_2 \\ l_2 &= \alpha \theta_1^2 + (1 - \alpha) \theta_2^2 \\ l_3 &= \alpha \theta_1^3 + (1 - \alpha) \theta_2^3\end{aligned}$$

Z pierwszego równania wyznaczmy  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{l_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}$$

Podstawmy to wyrażenie do drugiego równania:

$$l_2 = \alpha \theta_1^2 + \theta_2^2 - \alpha \theta_2^2 = \alpha(\theta_1^2 - \theta_2^2) + \theta_2^2 = \frac{l_1 - \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}(\theta_1^2 - \theta_2^2) + \theta_2^2 = (l_1 - \theta_2)(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2^2$$

Uzyskamy stąd równanie:

$$(l_1 - \theta_2)(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2^2 - l_2 = 0,$$

w którym są dwie niewiadome  $\theta_1$  i  $\theta_2$ .

W celu wyeliminowania jednej z nich obliczmy różnicę

$$l_3 - l_1 l_2$$

i podzielmy ją przez  $l_2 - l_1^2$ .

$$l_3 - l_1 l_2 = \alpha(1 - \alpha)(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$l_2 - l_1^2 = \alpha(1 - \alpha)(\theta_1 - \theta_2)^2$$

po podzieleniu uzyskujemy

$$\frac{l_3 - l_1 l_2}{l_2 - l_1^2} = \theta_1 + \theta_2$$

Po podstawieniu do uzyskanego równania otrzymujemy:

$$(l_1 - \theta_2) \frac{l_3 - l_1 l_2}{l_2 - l_1^2} + \theta_2^2 - l_2 = 0$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$B = \frac{l_3 - l_1 l_2}{l_2 - l_1^2}$$

Powyższe równanie przyjmie wówczas postać:

$$(l_1 - \theta_2)B + \theta_2^2 - l_2 = 0.$$

Zapiszmy je następująco:

$$\theta_2^2 - B\theta_2 + C = 0$$

gdzie

$$C = l_1 B - l_2$$

Uzyskałiśmy równie drugiego stopnia. Ma ono dwa rozwiązania, które traktujemy jako estymatory  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ , gdy  $B^2 - 4C > 0$ .

Czyli

$$\hat{\theta}_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

Na ich podstawie uzyskujemy estymator  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \frac{l_1 - \hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}.$$

Rozpatrując poprzedni przykład, uzyskujemy następujące wyniki:

$$l_1 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{9 \cdot 20} (2+3+8+12+15+1+9+3+19) = 0,4$$

$$l_2 = \frac{1}{nm(m-1)} \sum_{i=1}^n k_i(k_i-1) =$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 20 \cdot 19} (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 + 15 \cdot 14 + 1 \cdot 0 + 9 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 19 \cdot 18) = 0,2415$$

$$l_3 = \frac{1}{nm(m-1)(m-2)} \sum_{i=1}^n k_i(k_i-1)(k_i-2) =$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} (2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + 12 \cdot 11 \cdot 10 +$$

$$+ 15 \cdot 14 \cdot 13 + 1 \cdot 0(1) + 9 \cdot 8 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 19 \cdot 18 \cdot 17) =$$

$$= \frac{10716}{180 \cdot 19 \cdot 18} = 0,1741$$

Stąd obliczamy

$$B = \frac{l_3 - l_2 l_1}{l_2 - l_1^2} = 0,9503$$

$$C = l_1 \cdot B - l_2 = 0,1386$$

Na ich podstawie obliczamy potrzebne parametry:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = 0,1799$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = 0,7704.$$

## Rozkłady złożone

Ogólnie mieszanę rozkładów można symbolicznie zapisać jako  $X \sim \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i$ , gdzie znak tyldy oznacza rozkład, a symbol po prawej stronie nie oznacza sumy zmiennych losowych, tylko rozkład tej sumy przy założeniu, że

zmienne losowe  $X_i$  mają różne rozkłady. Rozkład tej mieszanki w przypadku dyskretnym ma postać

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i P(X_i = x) \quad (1)$$

lub gdy  $X$  jest zmienną losową ciągłą

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x), \quad (2)$$

przy czym

$$\alpha_i > 0 \text{ dla } i = \overline{1, r}, \text{ oraz } \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$$

Symbol  $i = \overline{1, r}$  oznacza to samo, co  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Przyglądając się wagom w powyższych wzorach, nietrudno zauważyć, że mogą być one interpretowane jako wartości prawdopodobieństw z pewnego rozkładu. Zdanie to na razie nic nie znaczy, póki nie powiemy, czego te prawdopodobieństwa mają dotyczyć.

Założmy, że gęstości  $f(x)$  oraz prawdopodobieństwa  $P(X = x)$  zależą od pewnego parametru  $\theta$ , którego wartość jest nieokreślona. Zapišemy tę zależność jako  $f(x|\theta)$  oraz  $P(X = x|\Theta = \theta)$ . Jako miarę tej nieokreśloności możemy przyjąć pewien rozkład o gęstości  $\pi(\theta)$  lub  $P(\Theta = \theta_j) = p_j$ , dla  $j = \overline{1, k}$ . Wówczas wzory (1) i (2) można zapisać jako:

$$\left. \begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{j \geq 0} P(\Theta = \theta_j) P(X = x | \Theta = \theta_j) \\ f(x) &= \sum_{j \geq 0} P(\Theta = \theta_j) f(x | \theta_j) \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ dyskretnego,} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} P(X = x) &= \int_{\Omega} \pi(\theta) P(X = x | \Theta = \theta) d\theta \\ f(x) &= \int_{\Omega} \pi(\theta) f(x | \theta) d\theta \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ ciągłego,}$$

gdzie  $\Omega$  jest przestrzenią parametrów. Uważny czytelnik zwróci uwagę, że po prawej stronie wzorów (3) mamy wartości oczekiwane pewnych funkcji, który-

mi są prawdopodobieństwo lub gęstość. Powyższe wzory można więc zapisać w równoważnej postaci

$$P(X = x) = E_{\theta}(P(X = x|\theta)),$$

$$f(x) = E_{\theta}(f(x|\theta)).$$

Dalszym uogólnieniem tych wzorów może być mieszanka rozkładów ze względu na pewien podzbiór parametrów w przypadku, gdy parametr  $\theta$  jest wektorem parametrów jak np. w rozkładzie normalnym  $\theta = (\mu, \sigma)$ . Mieszanki rozkładów tego typu często są nazywane rozkładami złożonymi i oznaczane są specjalnym symbolem

$$f(x|\Theta = \theta) \wedge_{\theta} \pi(\theta)$$

$$P(X = x|\Theta = \theta) \wedge_{\theta} \pi(\theta)$$

który odczytujemy w następujący sposób: rozkład złożony jest złożeniem dwóch rozkładów (może ich być więcej) – rozkładu zmiennej losowej  $X$ , który jest określony z dokładnością do nieznanego parametru  $\theta$ , którego rozkład  $\pi(\theta)$  jest znany.

Ogólniejszy zapis ma postać

$$F_A \wedge_{\Theta} F_B,$$

gdzie po lewej stronie mamy rozkład  $X$  ze zmiennym parametrem  $\Theta$ , a po prawej stronie rozkład zmiennej  $\Theta$ .

### Przykład 1.

Rozważmy rozkład typu:

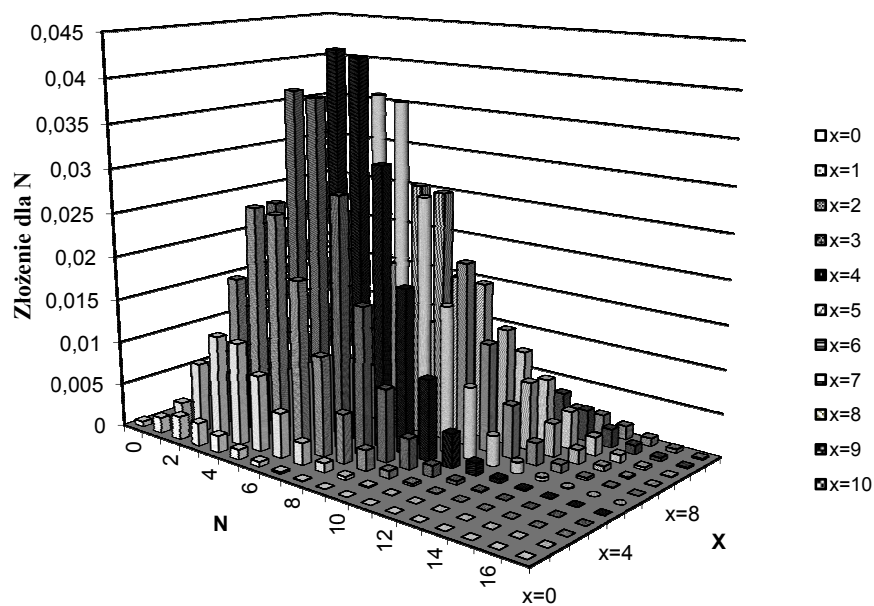
$$B(N, p) \wedge_N P(\lambda).$$

Odczytując ten symbol, widzimy, że jest to mieszanka rozkładu dwumianowego o nieznannej liczbie doświadczeń  $x_1, x_2, \dots, x_N$  wykonanych wg schematu Bernoulliego. Niepewność co do wartości  $N$  określamy za pomocą rozkładu Poissona z parametrem  $\lambda$ . Oczywiście parametry  $p$  i  $\lambda$  nie muszą być znane i wtedy są estymowane na podstawie wyników próby losowej. Zauważmy, że skoro w próbie o nieokreślonej liczbie  $N$  obserwacji odnotowano  $x$  sukcesów, to liczba obserwacji musi być co najmniej  $x$ .

$$\begin{aligned}
 P(X=x) &= E_N(P(X=x|N=n)) = \sum_{n=x}^{\infty} \left( \underbrace{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{\text{Prawdopodobieństwo } X=x \text{ z rozkładu } B(n,p)} \underbrace{\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}}_{\text{Prawdopodobieństwo } N=n \text{ z rozkładu } P(\lambda)} \right) = \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(\lambda p)^x (\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!} = \frac{e^{-\lambda}}{x!} (\lambda p)^x \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!} = \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{x!} (\lambda p)^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{x!} (\lambda p)^x e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p}
 \end{aligned}$$

Jak widać, mieszanka ma rozkład Poissona o parametrze  $\lambda p$ , co symbolicznie można zapisać

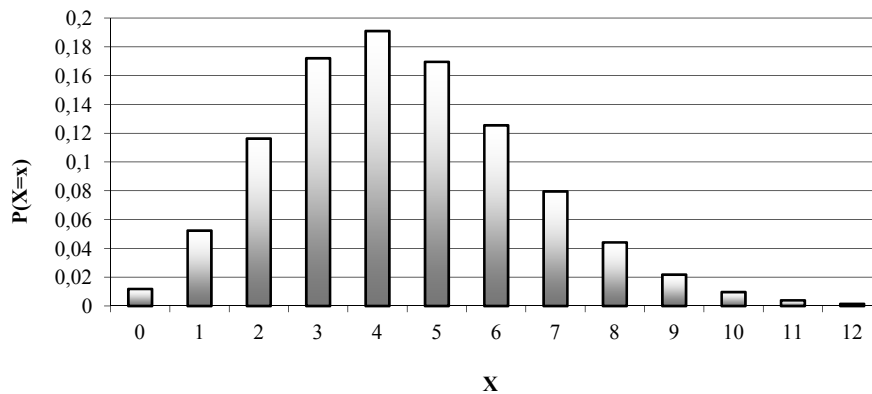
$$P(\lambda p) = B(N, p) \wedge_N P(\lambda)$$



**Rysunek 1.** Składowe rozkładów  $B(N, 0,6)$  i  $P(7,4)$ .

Opracowanie własne

Rysunek 1 przedstawia wykres kolumnowy poszczególnych składników sumy  $\binom{n}{x} 0,6^x 0,4^{n-x} \frac{7,4^n}{n!} e^{-7,4} = \frac{1,5^x 2,96^n}{x!(n-x)!} e^{-7,4}$ , za pomocą których wyznaczany jest rozkład  $P(X = x)$  mieszanki  $B(N, 0,6) \wedge_N P(7,4)$ . Dokonujemy tego, sumując dla wybranego  $x$  na osi  $X$  długości wszystkich słupków histogramu wzdłuż osi  $N$ . Ostatecznie otrzymujemy w tym przykładzie dla wybranych parametrów rozkład Poissona o parametrze równym 4,44.



**Rysunek 2.** Rozkład  $P(4,44) = B(N;0,6) \wedge_N P(7,4)$

Opracowanie własne.

### Przykład 2.

Zauważmy, że jeżeli mamy praktycznie pewność, że nieznaną parametr przyjmuje wartość  $\theta_0$ , rozkład złożony sprowadza się do zwykłego rozkładu. Niech

$$P(\Theta = \theta_0) = 1$$

to

$$\begin{aligned} P(X = x) &= E_{\theta} (P(X = x|\theta)) = \sum_{j \geq 0} P(X = x|\theta_j) P(\Theta = \theta_j) = \\ &= P(X = x|\theta_0), \\ f(x) &= E_{\theta} (f(x|\theta)) = f(x|\theta_0). \end{aligned}$$



**Przykład 3.**

Znaleźć rozkład będący złożeniem rozkładu dwumianowego o nieznanym parametrze  $P$ , którego rozkład jest rozkładem beta o parametrach  $a$  i  $b$ .

$$\begin{aligned}
 & B(N, P) \underset{P}{\wedge} \text{Beta}(a, b) \\
 f(x) &= \int_0^1 \underbrace{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}_{\text{rozkład dwumianowy}} \underbrace{\frac{p^{a-1} (1-p)^{b-1}}{\text{Beta}[a, b]}}_{\text{rozkład beta}} dp = \frac{\binom{n}{x}}{\text{Beta}[a, b]} \int_0^1 \underbrace{p^{x+a-1} (1-p)^{n-x+b-1}}_{\text{Beta}(x+a, n-x+b)} dp = \\
 &= \frac{\binom{n}{x} \text{Beta}[x+a, n-x+b]}{\text{Beta}[a, b]},
 \end{aligned}$$

gdzie  $\text{Beta}[a, b] = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ .

Jest to rozkład beta-dwumianowy, który oznacza się symbolem  $BB(n, a, b)$ .

**Przykład 4.**

Znaleźć rozkład będący złożeniem dwóch rozkładów dwumianowych

$$B(N, p) \underset{N}{\wedge} B(m, q)$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
 P(X=x) &= \sum_{n=x}^m \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{n} q^n (1-q)^{m-n} = \\
 &= \frac{m!}{x!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-q)^m \sum_{n=x}^m \frac{1}{(n-x)!(m-n)!} \left(\frac{(1-p)q}{1-q}\right)^n = \\
 &= \frac{m!}{x!(m-x)!} \left(\frac{pq}{1-q}\right)^x (1-q)^m \sum_{n=x}^m \frac{(m-x)!}{(n-x)!(m-n)!} \left(\frac{(1-p)q}{1-q}\right)^{n-x} = \\
 &= \binom{m}{x} \left(\frac{pq}{1-q}\right)^x (1-q)^m \left(\frac{(1-p)q}{1-q} + 1\right)^{m-x} = \binom{m}{x} (pq)^x (1-pq)^{m-x}
 \end{aligned}$$

W wyniku otrzymuje się rozkład dwumianowy  $B(m, pq)$ .

**Przykład 5.**

Niech będzie dana gęstość rozkładu gamma  $G(\alpha, \beta)$ :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0.$$

Znaleźć mieszanke rozkładu Poissona  $P(\lambda)$  z powyższym rozkładem:

$$P(\Lambda) \wedge G(\alpha, \beta).$$

W wyniku obliczeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \int_0^\infty \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} d\lambda = \frac{1}{x! \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{x+\alpha-1} e^{-\lambda \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)} d\lambda = \\ &= \frac{\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha} \Gamma(x+\alpha)}{x! \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha} \Gamma(x+\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{x+\alpha-1} e^{-\lambda \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)} d\lambda = \frac{\beta^x (x+\alpha-1) \cdots \alpha}{x! (\beta+1)^{x+\alpha}} \\ &= \frac{(x+\alpha-1)!}{(\alpha-1)! x!} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^x \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^\alpha = \binom{x+\alpha-1}{\alpha-1} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^x \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Złożenie jest rozkładem ujemnym dwumianowym oznaczanym symbolicznie przez  $NB(\alpha, \beta)$ .

**Przykład 6.**

Znajdźmy rozkład  $N\left(0, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \wedge G(\alpha, \beta)$ , gdzie  $\lambda > 0$ . Na podstawie wzorów

(3) dla obu rozkładów ciągłych mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_\Omega \pi(\lambda) f(x|\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} \sqrt{\lambda}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\lambda \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\beta}\right)} d\lambda = \\ &= \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{x^2}{2}\right)^{-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

Jest to rozkład Studenta o parametrach  $\alpha$  i  $\beta$ .

Interesująca jest interpretacja mieszanki rozkładów poprzez twierdzenie Bayesa. Z (3) wynika, że

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \frac{P(\Theta = \theta_j)P(X = x|\Theta = \theta_j)}{P(X = x)} = 1 \\ \sum_{j \geq 0} \frac{P(\Theta = \theta_j)f(x|\theta_j)}{f(x)} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ dyskretnego}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\pi(\theta)P(X = x|\Theta = \theta)}{P(X = x)} d\theta = 1 \\ \int_{\Omega} \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{f(x)} d\theta = 1 \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ ciągłego}$$

Wstawiając za mianowniki wyrażenia z (3), otrzymujemy pod znakami sum lub całek wzory analogiczne do wzorów Bayesa, skąd wynika, że funkcje podcałkowe są rozkładami aposteriori dla rozkładów apriori  $\pi(\theta)$  dla przypadku ciągłego i  $P(\Theta = \theta)$  w przypadku dyskretnym

$$\left. \begin{aligned} P(\Theta = \theta_j|X = x) = \frac{P(\Theta = \theta_j)P(X = x|\Theta = \theta_j)}{\sum_{j \geq 0} P(\Theta = \theta_j)P(X = x|\Theta = \theta_j)} \\ P(\Theta = \theta_j|x) = \frac{P(\Theta = \theta_j)f(x|\theta_j)}{\sum_{j \geq 0} P(\Theta = \theta_j)f(x|\theta_j)} \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ dyskretnego,}$$

$$\left. \begin{aligned} \pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)P(X = x|\Theta = \theta)}{\int_{\Omega} \pi(\theta)P(X = x|\Theta = \theta)d\theta} \\ \pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{\int_{\Omega} \pi(\theta)f(x|\theta)d\theta} \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ ciągłego.}$$

Stąd

$$\left. \begin{aligned} P(X = x) = \sum_{j \geq 0} P(\Theta = \theta_j|X = x) \\ f(x) = \sum_{j \geq 0} P(\Theta = \theta_j|x) \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ dyskretnego,}$$

$$\left. \begin{aligned} P(X=x) &= \int_{\Omega} \pi(\theta|x) d\theta \\ f(x) &= \int_{\Omega} \pi(\theta|x) d\theta \end{aligned} \right\} \text{ dla } \theta \text{ ciągłego.}$$

Na zakończenie przytoczone zostaną twierdzenia mające zastosowanie w analizie rozkładów złożonych. Dla mieszanek rozkładów o niezależnych rozkładach  $F_1, F_2$  i  $F_3$  zachodzą :

1.  $(F_1 \wedge F_2) \wedge F_3 \sim F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)$
2.  $E(g(X)) = E_{\theta} \left( E_{x|\theta} (g(X)) \right)$
3.  $V(g(X)) = V_{\theta} \left( E_{x|\theta} (g(X)) \right) + E_{\theta} \left( V_{x|\theta} (g(X)) \right)$ .

D o w ó d 1 dla rozkładów ciągłych:

$X \sim F_1(x|\theta_1)$ ,  $\theta_1 \subset \Omega_1$ ,  $Y \sim F_2(y|\theta_2)$ ,  $\theta_2 \subset \Omega_2$ ,  $Z \sim F_3(x|\theta_3)$ . Wtedy lewa strona jest równa

$$\begin{aligned} \left( F_1(x|\theta_1) \wedge_{\theta_1} F_2(\theta_1|\theta_2) \right) \wedge_{\theta_2} F_3(\theta_2) &= \int_{\Omega_2} \left( F_1(x|\theta_1) \wedge_{\theta_1} F_2(\theta_1|\theta_2) \right) f_3(\theta_2) d\theta_2 = \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f_1(x|\theta_1) f_2(\theta_1|\theta_2) f_3(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned}$$

a prawa

$$\begin{aligned} F_1(x|\theta_1) \wedge_{\theta_1} \left( F_2(\theta_1|\theta_2) \wedge_{\theta_2} F_3(\theta_2) \right) &= \int_{\Omega_1} f_1(x|\theta_1) \left( F_2(\theta_1|\theta_2) \wedge_{\theta_2} F_3(\theta_2) \right) d\theta_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f_1(x|\theta_1) f_2(\theta_1|\theta_2) f_3(\theta_2) d\theta_2 d\theta_1, \end{aligned}$$

co kończy dowód. Dla pozostałych przypadków przebiega on analogicznie.

D o w ó d 2 :

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \int_{\Omega} \int_{\mathcal{X}} g(x) f(x, \theta) dx d\theta = \int_{\Omega} \int_{\mathcal{X}} g(x) f(x|\theta) dx \pi(\theta) d\theta = \\ &= \int_{\Omega} E_{x|\theta} (g(X)) \pi(\theta) d\theta = E_{\theta} \left( E_{x|\theta} (g(X)) \right) \end{aligned}$$

Dowód 3:

$$\begin{aligned} V(g(X)) &= E(g(X) - E(g(X)))^2 = E(g^2(X)) - E^2(g(X)) = \\ &= E_\theta \left( E_{X|\theta} (g^2(X)) \right) - \left( E_\theta \left( E_{X|\theta} (g(X)) \right) \right)^2 = E_\theta \left( E_{X|\theta} (g^2(X)) \right) - E_\theta \left( E_{X|\theta}^2 (g(X)) \right) + \\ &+ E_\theta \left( E_{X|\theta}^2 (g(X)) \right) - \left( E_\theta \left( E_{X|\theta} (g(X)) \right) \right)^2 = E_\theta \left( E_{X|\theta} (g^2(X)) - E_{X|\theta}^2 (g(X)) \right) + \\ &+ E_\theta \left( E_{X|\theta}^2 (g(X)) \right) - E_\theta^2 \left( E_{X|\theta} (g(X)) \right) = E_\theta \left( V_{X|\theta} (g(X)) \right) + V_\theta \left( E_{X|\theta} (g(X)) \right) \end{aligned}$$

**Przykład 7.**

Obliczyć parametry rozkładu mieszanki  $P(\Lambda) \wedge G(\alpha, \beta)$ . Wartość oczekiwana jest równa

$$p = \omega^2 E(X) = E_\Lambda \left( \underbrace{E_{X|\Lambda}(X)}_{\text{Wartość oczekiwana } P(\Lambda)} \right) = \underbrace{E_\Lambda(\Lambda)}_{\text{wartość oczekiwana } G(\alpha, \beta)} = \alpha\beta$$

a wariancja

$$V(X) = V_\Lambda \left( E_{X|\Lambda}(X) \right) + E_\Lambda \left( V_{X|\Lambda}(X) \right) = V_\Lambda(\Lambda) + E_\Lambda(\Lambda) = \alpha\beta^2 + \alpha\beta = \alpha\beta(1 + \beta)$$

Przedstawione w artykule rozkłady złożone w tym ujęciu służą przede wszystkim do konstruowania nowych rozkładów. Nie zawsze udaje się uzyskać ich postać analityczną. Przykładem tego jest rozkład  $N(0, \sqrt{T}\omega) \wedge_T \text{Geometryczny}(p)$ , gdzie nie jest znana analityczna postać następującej sumy

$$f(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{p(1-p)^{t-1}}{\sqrt{2\pi t}\omega} e^{-\frac{x^2}{2t\omega^2}}.$$

W takim przypadku do obliczeń należy użyć metod numerycznych. Za pomocą wyżej podanych wzorów można wyliczyć wartość oczekiwaną tego rozkładu, która jest równa zero i wariancję w tym przypadku postaci  $\omega^2 / p$ . Zadając wariancję rozkładu złożonego, np. równą 1, mamy warunek  $p = \omega^2$ . Znając  $p$ , można wyznaczyć  $\omega$ , co upraszcza obliczenie powyższej sumy.

## Literatura

- [1] Gerstenkorn T., Śródka T., *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1972.
- [2] Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1968.
- [3] Johnson N.L., Kemp A.W., Kotz S., *Univariate Discrete Distributions*, Wiley, New Jersey 2005.
- [4] Rose C., Smith M.D., *Mathematical Statistics with Matematica*, Springer, New York 2002.

## Summary

### Mixture Distributions

Apart from elementary introduction into the problem of mixture distributions, in a great detail there are discussed the basic methods of estimation: maximum likelihood and method of moments. The paper ends with presentation of compound distributions applied in insurance.

Agnieszka Pilis  
Marek Szambelan  
Wiesław Pilis  
Tomasz Pilis

## **Wizerunek współpracowników ubezpieczeń na życie firmy pośrednictwa ubezpieczeniowego Financial Marketing Group International S.A.**

### **1. Wstęp**

Ze względu na czynniki demograficzne (wydłużenie czasu trwania życia, spadek dzietności, wzrost liczby niepełnosprawnych), a także czynniki gospodarcze (wzrost bezrobocia, zabezpieczenie społeczne nie dające gwarancji utrzymania się na emeryturze), rozwój rynku ubezpieczeń na życie leży w interesie zarówno firm ubezpieczeniowych, jak i gospodarki narodowej, a przede wszystkim – obywateli (por. [7], [13], [18]).

Współcześnie na rynku polskim z szeregu ubezpieczeń życiowych oferuje się między innymi następujące rodzaje: terminowe, na życie, z funduszem inwestycyjnym, posagowe, rentowe, wypadkowe, chorobowe, grupowe. Pomimo dużej różnorodności produktów i korzyści wynikających z posiadania polisy ubezpieczeniowej zakup jej jest trudną decyzją. Potwierdzeniem tego są badania (por. [4], [7], [16]), dotyczące przyczyn nieposiadania ubezpieczeń na życie, przyczyn rezygnacji z polisy oraz świadomości ubezpieczeniowej, rozumianej jako stan wiedzy i stosunek do ubezpieczeń. I tak, wśród przyczyn nieposiadania ubezpieczeń na życie znalazły się: obecna sytuacja ekonomiczna klienta i wynikające z tego trudności opłacania wysokich składek, brak zaufania do firm ubezpieczeniowych, brak potrzeby ubezpieczeń, niewystarczająca wiedza o ubezpieczeniach. Niska świadomość ubezpieczeniowa przejawia się jako brak zrozumienia roli i znaczenia ubezpieczeń w życiu człowieka, niewystarczające rozumienie i rozróżnianie poszczególnych rodzajów ryzyka i produktów ubezpieczeniowych oraz w braku umiejętności właściwych zachowań podczas długiego

okresu trwania ubezpieczenia życiowego. Z kolei, wśród przyczyn rezygnacji z ubezpieczenia na życie badani podawali utratę zaufania do firmy, zmianę firmy na inną, sugestie znajomych o nieskuteczności tej formy oszczędzania oraz pogorszenie sytuacji materialnej. W kontekście licznych wątpliwości klientów, co do skuteczności działania polisy jako instrumentu zabezpieczenia ich przyszłości i posiadania polisy jako jednej z form oszczędzania, zwraca się uwagę na niską jakość pracy agentów ubezpieczeniowych, którzy sami wątpliwościom tym po czasie mogą podlegać (por. [1], [13]). Jakość pracy agenta ubezpieczeniowego w dużej mierze związana jest z motywacją do pracy w tym zawodzie oraz posiadanymi kompetencjami. Kompetencje zdobywane na specjalistycznych szkoleniach, oprócz ogółu wiedzy, umiejętności i doświadczenia, wynikają z postawy przyjmowanej przez pracownika oraz uznawanych przez niego wartości (por. [6]). Ponadto agent ubezpieczeniowy powinien posiadać: umiejętność i doświadczenie w kontaktach z ludźmi (analizowanie potrzeb klienta, eksponowanie korzyści, kształtowanie emocji i uczuć odbiorcy, kontrolowanie reakcji klienta), umiejętność pracy samodzielnej i zespołowej, umiejętność planowania i samodzielnego zarządzania czasem pracy, odporność na stres, samomotywację, oraz potrzebę nieustannego uczenia się, gdyż rynek ulega ciągłym przeobrażeniom i wymaga natychmiastowej reakcji na zmianę (por. [9]). Wśród firm sprzedających w Polsce ubezpieczenia na życie jest powstała w 1994 roku w formie spółki akcyjnej Financial Marketing Group International S.A. (FMG). Jako pośrednik sprzedaży ubezpieczeń na życie zaczęła dystrybuować głównie produkty AMPLICO LIFE Pierwszego Amerykańsko-Polskiego Towarzystwa Ubezpieczeń i Reasekuracji S.A. Sprzedającym polisy w firmie FMG nie jest agent, ale nazywa się go współpracownikiem; szkolony jest on w tej instytucji i otrzymuje za swą pracę prowizję. Sprzedaż polis odbywa się w systemie sieciowym, a więc współpracownicy – poza cechami sprzedawcy – muszą wykazywać zalety lidera grupy z nim współpracującej (por. [12]).

## 2. Cel pracy

W prezentowanej pracy podjęto próbę nakreślenia obrazu współpracowników firmy FMG i ukazania czynników modyfikujących. W tym celu, po zebraniu danych osobowych i określających osiągnięcia zawodowe współpracowników, postanowiono zbadać:

1. Motywację do podjęcia pracy jako współpracownik ubezpieczeniowy, a w tym określenie:
  - czy wykonywanie tej pracy stanowi jedyne źródło dochodu,
  - motywów podjęcia omawianej pracy.



2. Postrzeganie potrzeby ubezpieczeń życiowych:
  - przed przystąpieniem do firmy FMG,
  - podczas wykonywania pracy w zakładzie pośrednictwa ubezpieczeniowego.
3. Postrzeganie przez współpracowników ubezpieczeniowych swoich aktualnych sukcesów i porażek oraz podanie przyczyn ich pojawiania się.
4. Wady i zalety firm FMG i AMPLICICO LIFE, dla których ankietowani pracują.

### 3. Materiał i metody badań

Badaniami objęto 162 współpracowników firmy FMG zajmujących się sprzedażą ubezpieczeń na życie. W celu odpowiedzi na postawione pytania badawcze zastosowano metodę sondażu diagnostycznego (por. [17]). Metoda ta nadaje się do badania tych przypadków, które nie posiadają instytucjonalnej lokalizacji, a są rozproszone w społeczeństwie. W sondażu diagnostycznym stwierdzone prawidłowości mają najwyższy stopień prawdopodobieństwa, w ramach ograniczonych doborem próby. Poza tymi ramami dostrzeżone prawidłowości przybierają charakter tym większego prawdopodobieństwa, im bardziej analizowaną populację możemy odnieść do podobnej całości.

W przeprowadzonych badaniach pośredników ubezpieczeniowych zastosowano ankietę. Pokazane w ankiecie sumujące się punkty, jakie zdobywa współpracownik w firmie FMG, są systemem oceny jego pracy własnej i pracy wykonanej przez sieć jego współpracowników. Ilość zdobytych punktów zależy od wielkości składki rocznej uzyskanej ze sprzedaży jednej polisy i ilości sprzedanych polis. Łączna ilość zdobytych punktów lokuje współpracownika na jednym z ośmiu poziomów kariery zawodowej, jako przedstawiciela handlowego, kadre kierowniczą lub dyrektorską. Cena za jeden punkt rośnie wraz ze wzrostem owego poziomu od 1. do 8. Za punkty własne współpracownik otrzymuje prowizję, za punkty zdobyte przez „sieć” – międzyprowizję. Uzyskane w ankiecie dane ilościowe podano w wartościach bezwzględnych i procentowych.

### 4. Wyniki badań i ich omówienie

#### Charakterystyka osobowa badanych

Mężczyźni stanowili 58,6% badanych, a kobiety 41,4%. Sprzedaż ubezpieczeń życiowych wymaga od współpracowników cech skuteczności w działaniu (por. [8]) i w przypadku sprzedaży sieciowej prowadzonej w FMG dodatkowych cech lidera grupy (por. [21]). Cechy te częściej posiadają mężczyźni, co jest zgodne z uzyskanymi przez nas wynikami.

**Tabela 1.** Wiek i płeć badanych osób

Badani	Wiek badanych				Płeć	
	do 25 l.	26–30 l.	31–40 l.	powyżej 40 l.	K	M.
n = 162	4	9	36	113	67	95
100%	2,4	5,6	22,2	69,8	41,4	58,6

Źródło: opracowanie własne

K – kobiety; M – mężczyźni

Większość współpracowników w naszych badaniach to osoby po 40 roku życia (69,8 %) i w przedziale pomiędzy 31 a 40 rokiem życia (22,2 %). Niewielki odsetek to ludzie do 25 roku życia (2,4 %) i w przedziale 26–30 lat (5,6 %) (tab. 1). Według niektórych autorów (por [9]), wiek przedstawiciela handlowego powinien przekraczać 25 lat, a uwzględniając wagę zakupu, jaką jest polisa ubezpieczenia życiowego, tj.: długi okres opłacania składki, wysoką cenę i istotną rolę, jaką spełnia ona w życiu człowieka, powinien być jeszcze wyższy – powyżej 35 lat. Potwierdzają to nasze badania, gdzie przeważają współpracownicy powyżej 40 lat.

**Tabela 2.** Stan cywilny

Badani	Stan cywilny				
	zamężna/zonaty	wolny(a)	mieszka z partnerem	rozwódziona(a)	wdowa/wdowiec
n = 162	133	13	3	6	7
100%	82,1	8,0	1,9	3,7	4,3

Źródło: opracowanie własne

Wśród badanych, 82,1% osób pozostaje w związkach małżeńskich, w stanie wolnym pozostaje 8,0%, z partnerem mieszka 1,9%, rozwiedzionych jest 3,7%, a owdowiałych jest 4,3% współpracowników ubezpieczeniowych (tab. 2).

**Tabela 3.** Informacja na temat posiadanych dzieci

Badani	Posiadane dzieci		Ilość posiadanych dzieci				
	tak	nie	1	2	3	4	powyżej 4
n = 162	147	15	28	89	23	5	2
100%	90,7	9,3	19	60,5	15,7	3,4	1,4

Źródło: opracowanie własne

Okazało się również, że 90,7% badanych posiada dzieci, z tej ilości aż 60,5% posiada ich dwoje, jedno dziecko posiada 19% badanych, troje natomiast 15,6%, a czworo i powyżej łącznie 4,8% (tab. 3). Te dane zgodne są z tendencjami, jakie współcześnie występują w Polsce i dotyczą znacznego zmniejszenia przyrostu naturalnego (por. [19]). Status rodzinny, tj. jego stan cywilny i wielkość najbliższej rodziny, może być czynnikiem stabilizującym jakość pracy zawodowej i wpływać na jej stabilność i osiągnięte rezultaty. Osiągnięte wyniki wydają się potwierdzać stawiane sugestie.

**Tabela 4.** Wykształcenie i zawód ankietowanych

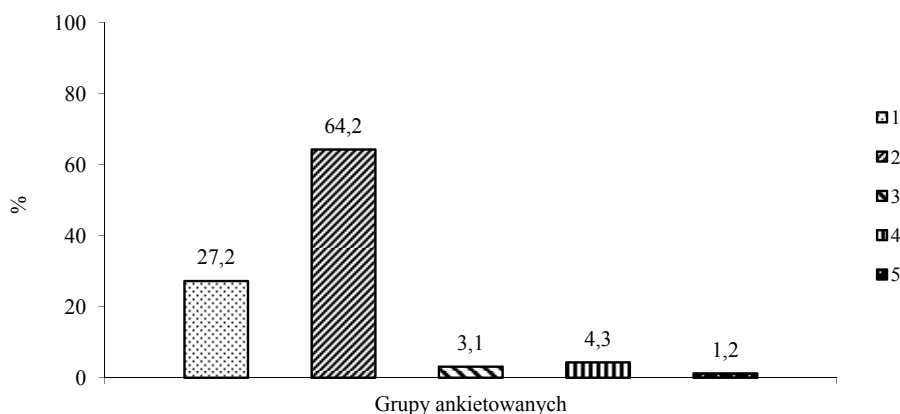
Badani	Wykształcenie – wyuczony zawód			
	Zawodowe: m.in. gastronomiczne, kierowca, hutnik	Średnie techniczne m.in.: chemik, górnik, mechanik, elektryk, technik drogowy, kolejowy, budowlany	Wyższe (inżynierskie) m.in.: elektryk, chemik, mechanik, zootechnik, budowlaniec	Wyższe (magnisterskie) m.in.: nauczyciel, prawnik, ekonomista, psycholog, lekarz
n = 162	20	48	29	65
100%	12,4	29,6	17,9	40,1

Źródło: opracowanie własne

Wśród biorących udział w badaniu współpracowników ubezpieczeniowych większość legitymuje się wyższym wykształceniem (58%). Średnie wykształcenie posiada 29,6%, a zawodowe 12,4% badanych. Istnieje bardzo duża różnorodność wyuczonych zawodów (tab. 4). Sprzedaż ubezpieczeń życiowych na konkurencyjnym rynku jest trudna, dlatego towarzystwa ubezpieczeniowe wymagają od swoich pracowników i dystrybutorów przynajmniej średniego wykształcenia i ciągle we własnym zakresie personel ten jest szkolony (por. [14]). Niezależnie od tego firmy ubezpieczeniowe wciąż specjalistycznie szkolą swój personel i dystrybutorów.

#### Status badanych współpracowników

Większość z badanych pracuje w zawodzie innym niż wyuczony (64,2%). Pracujących w zawodzie wyuczonym pozostaje 27,2% ankietowanych. Wśród badanych tylko 3,1% to osoby bezrobotne, 4,3% to emeryci, zaś studenci stanowią 1,2% badanych (wykres 1).



1. osoby pracujące w zawodzie wyuczonym
2. osoby pracujące w innym zawodzie
3. bezrobotni
4. emeryci
5. studenci

**Wykres 1.** Aktualna sytuacja zawodowa ankietowanych

Źródło: opracowanie własne

Pomimo że w Polsce istnieją studia wyższe o kierunku kształcenia w zakresie ubezpieczeń, to znikoma ilość absolwentów tego kierunku pracuje w dystrybucji produktów ubezpieczeniowych. W naszych badaniach nie ujawniono takich osób. Firmy we własnym zakresie, po spełnieniu wymogów formalnych, szkolą agentów i innych dystrybutorów ubezpieczeniowych, rekrutując ich z innych zawodów.

**Tabela 5.** Łączna liczba punktów zdobytych przez współpracowników ubezpieczeniowych

Badani	Łączna liczba punktów						
	do 1000	od 1001 do 3000	od 3001 do 10 000	od 10 001 do 25 000	od 25 001 do 60 000	od 60 001 do 100 000	powyżej 100 000
n = 162	53	42	39	1	16	6	5
100%	32,7	25,9	24,1	0,6	9,9	3,7	3,1

Źródło: opracowanie własne

Wśród badanych, uwzględniając strukturę i łączną ilość zdobytych punktów, w przedziale do 25 000 punktów znajduje się 83,3% badanych. Powyżej 25 001

punktów uzyskało 16,7% badanych współpracowników, którzy reprezentują kadrę dyrektorską (tab. 5).

Liczby te wskazują na niewielką ilość współpracowników osiągających najwyższy status zawodowy. Wystarczy wspomnieć, że do roku 2005 firma FMG przeszkoliła około 120 000 współpracowników, z czego dyrektorów, a więc ludzi, którzy zgromadzili w swoim dorobku powyżej 25 000 punktów, jest mniej niż 80 osób (por. [15]).

**Tabela 6.** Liczba punktów zdobytych przez współpracowników ubezpieczeniowych osobiście

Badani	Liczba punktów zdobytych osobiście							
	do 100	od 101 do 300	od 301 do 500	od 501 do 700	od 701 do 900	od 901 do 1100	od 1101 do 1500	od 1501 do 2200
n = 162	38	72	43	3	2	2	1	1
100%	23,5	44,4	26,6	1,9	1,2	1,2	0,6	0,6

Źródło: opracowanie własne

Wśród badanych zdecydowaną większość stanowią współpracownicy, którzy zdobyli osobiście od 1 do 500 punktów (94,5%). 5,5% to współpracownicy, którzy zdobyli od 501 do 2200 punktów własnych (tab. 6). W systemie sprzedaży sieciowej wskaźnik ten nie decyduje o tzw. karierze, gdyż umiejętność sprzedaży indywidualnej polis życiowych nie jest tak istotna jak rekrutacja, nauka i motywacja (umiejętność pracy zespołowej) nowych współpracowników, czyli stawianie się liderem grupy (por. [11], [21]).

**Tabela 7.** Ilość lat po seminarium podstawowym

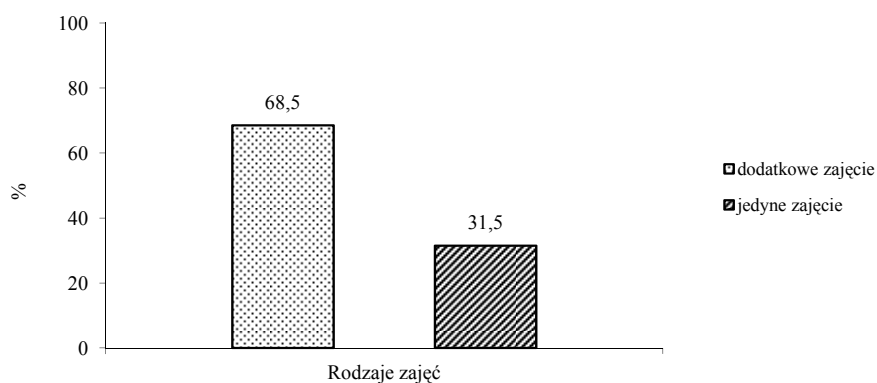
Badani	Ilość lat po seminarium podstawowym									
	1 rok	2 lata	3 lata	4 lata	5 lat	6 lat	7 lat	8 lat	9 lat	10 lat
n = 162	26	22	36	21	13	21	12	9	1	1
100%	16,0	13,6	22,2	13,0	8,0	13	7,4	5,6	0,6	0,6

Źródło: opracowanie własne

Większość badanych współpracowników ma staż pracy w tym zawodzie do 3 lat (51,8%). 34% badanych pracuje od 4 do 6 lat, a 14,2% ma najdłuższy staż pracy w firmie FMG – od 7 do 10 lat (tab. 7). Wskaźniki te potwierdzają wcześniejsze informacje o bardzo dużej fluktuacji wśród dystrybutorów ubezpieczeń życiowych. Według niektórych karierę robi w tym zawodzie jedynie kilka do kilkunastu promili spośród rozpoczynających w nim pracę (por. [14]).

### 3. Motywacje podjęcia pracy w sprzedaży ubezpieczeń życiowych

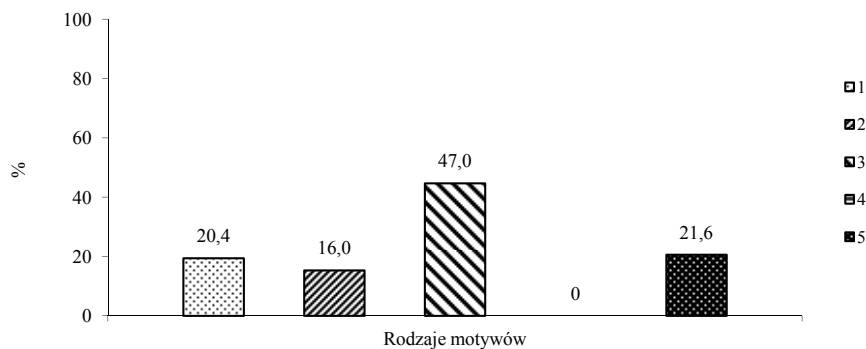
Dla 68,5% badanych praca w firmie FMG nie była głównym źródłem dochodu i stanowi dodatkowe zajęcie. Dla 31,5% badanych (przypuszczalnie części kadry kierowniczej i dyrektorskiej) jest to jedyne zajęcie (wykres 2).



**Wykres 2.** Rozkład zajęć badanych współpracowników

Źródło: opracowanie własne

W Polsce nadal ubezpieczenia na życie nie są tak bardzo popularne jak w krajach gospodarczo wyżej rozwiniętych, a świadomość ubezpieczeniowa społeczeństwa dopiero się rozwija (por. [5]). Dlatego też nie wytworzyła się jeszcze stabilna grupa dystrybutorów tych produktów, która funkcjonuje zawodowo jedynie w tej profesji. Działający w FMG współpracownicy, w większości o małych dochodach z ubezpieczeń, pracę tę traktują dorywczo.



1. pasjonuje cię wykonywanie takiej pracy
2. cenisz sobie kontakt z ludźmi
3. uważasz, że można w tym zawodzie zarobić duże pieniądze
4. nie mogłeś dostać innej pracy
5. praca, którą wykonujesz, jest mało dochodowa, postanowiłeś poszukać dodatkowego źródła dochodu

Uwaga: suma wartości procentowych odbiega od 100%, ponieważ respondent mógł wskazać więcej niż jedną odpowiedź.

**Wykres 3.** Motywy podjęcia pracy w dystrybucji ubezpieczeń życiowych

Źródło: opracowanie własne

Wśród motywów podjęcia pracy w zawodzie dystrybutora ubezpieczeń życiowych wyraźnie dostrzec można czynnik finansowy, który to motyw wskazało łącznie 68,6% badanych (diagram 3 i 5 na wykresie 3). 20,4% badanych to osoby, które pasjonuje wykonywanie takiej pracy, 16% badanych ceni sobie kontakt i pracę z ludźmi. Wśród badanych nie znalazły się osoby, dla których motywem podjęcia pracy w dystrybucji ubezpieczeń życiowych była trudność w znalezieniu innej pracy (wykres 3). Z uwagi na fakt, że jest to jeden z trudniejszych zawodów, motywacja nie powinna mieć wyłącznie charakteru finansowego, ale powinna obejmować również aspekt psychologiczny, który rozwijany jest między innymi przez system awansu, jakość współpracy z przełożonym oraz środowiskiem współpracowników (por. [18]).

#### 4. Postrzeganie potrzeby ubezpieczeń przez ankietowanych

Wyniki badań, dotyczące postrzegania potrzeby ubezpieczeń życiowych przed przystąpieniem do firmy, w skali od 1 do 10 punktów wskazują, iż 31,4% badanych zaznaczyła maksymalną ilość punktów.

**Tabela 8.** Postrzeganie przez badanych potrzeby ubezpieczeń przed przystąpieniem do firmy, w skali od 1 do 10 (1 – cecha minimalna, 10 – cecha maksymalna).

Skala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba badanych	10	13	11	9	25	10	11	15	7	51
%	6,2	8,0	6,8	5,6	15,4	6,2	6,8	9,3	4,3	31,4

Źródło: opracowanie własne

42% wskazało od 5 do 9 punktów, 6,2% badanych potrzebę ubezpieczeń określiło jako minimalną. Łącznie, od 2 do 4 punktów w skali 10-punktowej wskazało 20,4% badanych (tab. 8). Wynika z tego, że większość przyszłych współpracowników miała wysoką świadomość korzyści z posiadania ubezpieczenia na życie.

Wysoka potrzeba posiadania ubezpieczeń życiowych, podczas czynnego uczestnictwa w sprzedaży tych polis, występowała u 82,7% badanych. Wśród badanych nie ma osób, które określiłyby potrzebę ubezpieczeń poniżej 6 punktów w skali od 1 do 10 punktów (tab. 9).

**Tabela 9.** Postrzeganie potrzeby ubezpieczeń podczas wykonywania zawodu, w skali od 1 do 10 (1 – cecha minimalna, 10 – cecha maksymalna).

Skala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba badanych	0	0	0	0	0	3	7	9	9	134
%	0	0	0	0	0	1,8	4,3	5,6	5,6	82,7

Źródło: opracowanie własne

Taka zmiana obrazu potrzeby ubezpieczeń życiowych wiąże się z odbytym przeszkoleniem i gruntowniejszym zainteresowaniem się przez współpracowników tą problematyką. Zaznaczyć jednak należy, że 17,3% badanych nie jest w pełni przekonana co do idei ubezpieczeń i konieczności posiadania polisy życiowej. Ma to niewątpliwie wpływ na motywację tych współpracowników i osiągane przez nich wyniki w sprzedaży, gdyż te są uzależnione od oceny oferowanego klientom produktu i siły sugestii sprzedającego (por. [8]).

## 5. Postrzeganie swoich sukcesów ubezpieczeniowych przez ankietowanych

Wyniki badań informują, iż zaledwie 16,2% ankietowanych określa swoje sukcesy w zawodzie dystrybutora ubezpieczeń życiowych wysoko lub bardzo wysoko – powyżej 7 punktów



**Tabela 10.** Postrzeganie przez ankietowanych swoich aktualnych sukcesów, w skali od 1 do 10 (1 – cecha minimalna, 10 – cecha maksymalna).

Skala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba badanych	20	20	22	18	32	24	9	10	3	4
%	12,3	12,3	13,6	11,1	19,7	14,8	5,6	6,2	1,9	2,5

Źródło: opracowanie własne

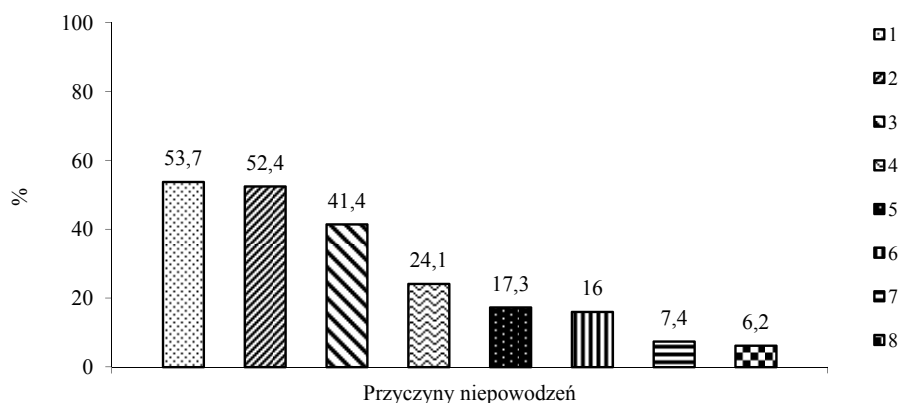
Dla 34,5% badanych są to wyniki średnie (5–6 punktów). 49,3% osób badanych ocenia aktualne sukcesy jako niskie (od 1 do 4 punktów) (tab. 10). Wyniki te pokrywają się z ilością punktów zdobytych łącznie przez ankietowanych – czyli ich statusem w firmie, gdzie 16,7% badanych stanowiła kadra dyrektorska (tab. 5), a więc ludzie najbardziej skuteczni w sieciowej sprzedaży ubezpieczeń życiowych.

**Tabela 11.** Postrzeganie przez współpracowników firmy FMG S.A. swoich możliwości w odniesieniu sukcesu

Skala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba badanych	0	0	3	1	5	6	9	30	28	80
%	0	0	1,9	0,6	3,1	3,7	5,6	18,5	17,3	49,3

Źródło: opracowanie własne

Wśród badanych współpracowników zdecydowana większość wierzy w to, że może odnieść większy sukces w tym zawodzie. Dla 49,3% jest to określone maksymalną ilością punktów, a dla 48,2% badanych jest to zakres od 5 do 9 pkt. Wśród badanych tylko 2,5% nie wierzy, iż większe sukcesy są możliwe do osiągnięcia (w skali są to odpowiedzi od 1 do 4 punktów – tab. 11). Odwrotnie więc do aktualnie odnoszonych sukcesów badani respondenci widzą swoje potencjalne możliwości w tym zakresie. Takie wskazania respondentów są głęboko subiektywne i zgodne z podstawowymi zachowaniami człowieka w różnych rodzajach działań, w tym i w sztuce sprzedaży, mówiącymi o tym, że nikt nie chce przebywać z przegranym, każdy natomiast podbudowuje się i chce przebywać ze zwycięzcą (por. [2], [19]). Istotnym zatem wydaje się znalezienie czynnika, który mógłby te potencjalne możliwości badanych uwolnić.



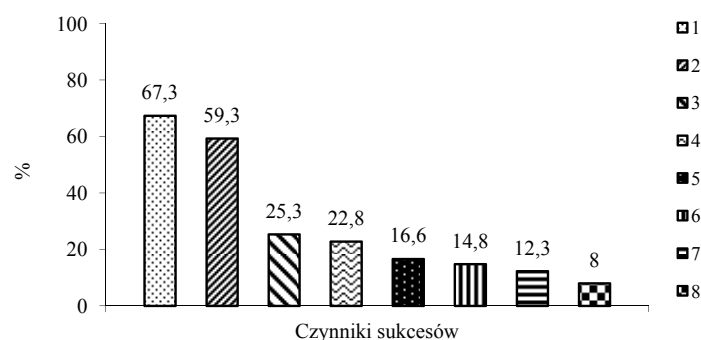
1. brak konsekwencji
2. brak samodyscypliny i systematyczności
3. lenistwo
4. praca w innym zawodzie i związany z tym brak czasu
5. brak dostatecznej wiedzy ubezpieczeniowej (analiza potrzeb klienta, poszukiwanie potencjalnych klientów, umawianie i prowadzenie spotkań)
6. bariery psychiczne (nieśmiałość, brak wiary w siebie, brak wyznaczonego celu, strach przed odmową i brak motywacji)
7. problemy związane z pracą struktury (rozpad struktury, brak opieki ze strony starszego, brak stabilizacji zasad w firmie)
8. problemy gospodarcze kraju (stagnacja gospodarki krajowej, brak stabilnego rynku, zubożenie społeczeństwa)

Uwaga: suma wartości procentowych odbiega od 100% , ponieważ respondent mógł wskazać więcej niż jedną odpowiedź.

**Wykres 4.** Przyczyny nieosiągnięcia zadowalających wyników w sprzedaży ubezpieczeń życiowych  
Źródło: opracowanie własne

Wśród najczęściej wymienianych przyczyn nieosiągnięcia zadowalających sukcesów w sprzedaży ubezpieczeń życiowych znajdują się: brak konsekwencji, samodyscypliny, systematyczności oraz lenistwo. 24,1% agentów wskazało na brak czasu spowodowany pracą w innym zawodzie. Brak dostatecznej wiedzy ubezpieczeniowej wymieniło 17,3% badanych, natomiast dla 16,0% badanych bariery psychiczne są istotnym problemem w osiągnięciu sukcesów. 7,4% jako przyczynę nieosiągnięcia zadowalających sukcesów wymieniło problemy związane z pracą struktury, a 6,2% wskazało problemy gospodarcze kraju (wykres 4). Podawane przyczyny braku powodzeń w sprzedaży ubezpieczeń życiowych dotyczą głównie braku cech wolicjonalnych respondentów. Zakładając obiektywizm wypowiedzi, brak tych walorów psychicznych może być czynnikiem dys-

kredytującym badanych w wykonywaniu omawianego zawodu (por. [8], [14], [20]). Prezentowane dane wydają się znacząco korespondować z wyżej omawianym niskim postrzeganiem swoich sukcesów w dystrybucji polis życiowych. Ponieważ sukces zawodowy w firmie FMG w głównej mierze związany jest z budowaniem grupy współpracowników (struktury) i jej dobrym funkcjonowaniem, ten właśnie czynnik powinien być priorytetowym w sukcesie zawodowym każdego respondenta, a w mniejszym zakresie ubezpieczanie własne klientów.



1. konsekwencja, upór w dążeniu do celu
2. pracowitość i wytrwałość
3. odporność na stres
4. umiejętność nawiązywania kontaktów
5. wiara w siebie, silna motywacja, chęć doskonalenia
6. jedyne zajęcie
7. profesjonalne wykształcenie
8. wiara w produkt

Uwaga: suma wartości procentowych odbiega od 100% , ponieważ respondent mógł wskazać więcej niż jedną odpowiedź.

**Wykres 5.** Czynniki decydujące o osiągnięciu sukcesów w sprzedaży ubezpieczeń życiowych

Źródło: opracowanie własne

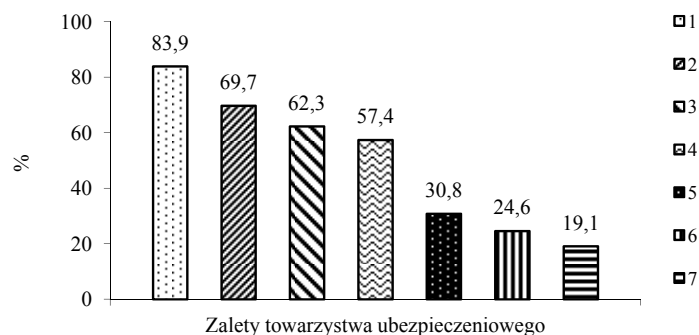
W odnoszeniu sukcesów sprzedających ubezpieczenia życiowe współpracowników FMG szczególnie istotne, w ich opinii, są: konsekwencja, upór w dążeniu do celu, pracowitość i wytrwałość. Istotnymi są także: odporność na stres, umiejętność nawiązywania kontaktów, wiara w siebie, silna motywacja i chęć doskonalenia. Osiągnięciu celów sprzyja traktowanie pracy w omawianym zawodzie jako jedyne (14,8%) zajęcie. 12,3% badanych wiąże osiągnięcie sukcesów z profesjonalnym wykształceniem, a dla 8,0% jest to także wiara w produkt (wykres 5).

Najczęściej wskazywane czynniki powodzenia w sprzedaży ubezpieczeń życiowych, poza dwoma tj. prowadzeniem ubezpieczeń jako jedyne zawodowe-

go zajęcia oraz profesjonalnym wykształceniem, dotyczą cech wolicjonalnych respondenta, które po części są genetycznie uwarunkowane, a po części są nabywane w trakcie pracy i szkoleń (por. [10]). Sugestie te wskazują, iż aby być dobrym dystrybutorem ubezpieczeń na życie, trzeba posiadać określone cechy, które są rozwijane w wielorakich formach szkoleń organizowanych przez zakłady ubezpieczeniowe i pośredniczące firmy sprzedające produkty tych zakładów (por. [14]).

## 6. Zalety i wady FMG International S.A.

Wśród wymienianych zalet omawianej firmy pośrednictwa ubezpieczeniowego FMG badani podkreślali jej wiarygodność (83,9%), pozycję na rynku krajowym (69,7%), stabilność (62,3%) i doświadczenie (57,4%).



1. wiarygodność i gwarancje;
2. pozycja firmy na rynku;
3. stabilność;
4. doświadczenie;
5. tradycja;
6. dobra jakość produktów ubezpieczeniowych;
7. dobra jakość obsługi klienta

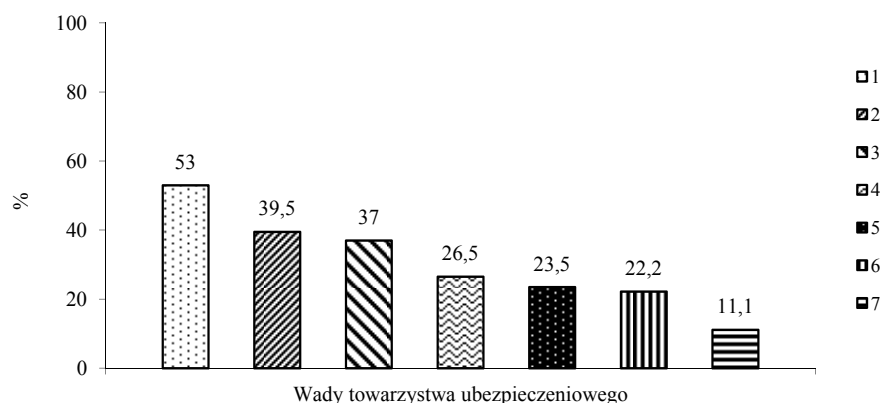
Uwaga: suma wartości procentowych odbiega od 100% , ponieważ respondent mógł wskazać więcej niż jedną odpowiedź.

**Wykres 6.** Główne zalety towarzystwa ubezpieczeniowego dostrzegane przez agentów ubezpieczeniowych

Źródło: opracowanie własne

Dla znacznej grupy badanych tradycja, dobre produkty oraz dobra obsługa klienta to także zalety tej firmy, dla której pracują (wykres 6).

Liczni autorzy podkreślają również, że to wiarygodność partnerów jest podstawą powodzenia w każdym rodzaju współpracy międzyludzkiej (por. [2], [3], [8], [20]). Wiarygodność jest budowana przez: pozycję firmy na rynku, jej doświadczenie i tradycję (por. [8], [18], [20]). Wiarę w sprzedawany produkt potwierdza 24,6 % agentów. W świetle literatury wiara w produkt jest ważnym czynnikiem powodzenia w pracy handlowca (por. [8], [18]).



1. niski poziom obsługi klienta
2. brak odpowiedniej opieki i szkoleń
3. działania promocyjne i reklamowe
4. system komunikacji wewnętrznej
5. brak elastyczności firmy w zakresie częstotliwości opłacania składek
6. wysokość prowizji
7. słaba interpretacja sytuacji rynkowej

Uwaga: suma wartości procentowych odbiega od 100% , ponieważ respondent mógł wskazać więcej niż jedną odpowiedź.

**Wykres 7.** Główne wady towarzystwa ubezpieczeniowego dostrzegane przez współpracowników ubezpieczeniowych

Źródło: opracowanie własne

Z wad pośrednika ubezpieczeniowego, dla którego badani pracują, wymienić należy przede wszystkim niski poziom obsługi klienta. Ma na niego wpływ duża fluktuacja współpracowników oraz polityka firmy FMG, która nie płaci już po 6. latach współpracownikowi należnych prowizji za obsługę klienta. Nie ma on zatem motywacji opiekować się dłużej klientem. 39,5% ankietowanych wskazało, jako wadę firmy FMG, brak odpowiedniej opieki nad współpracownikiem i brak szkoleń. Świadczy to o słabej pracy kadry menedżerskiej tej firmy. Z niską jakością organizacji pracy kierowniczej wiąże się również brak działań promocyjnych i reklamowych oraz krytyka systemu komunikacji wewnętrznej

współpracowników. Ankietowani zwracają także uwagę na niedostatki systemu wynagrodzeń, który koresponduje z poziomem obsługi klienta, oraz na politykę firmy w zakresie interpretacji sytuacji rynkowej i elastyczności w zakresie częstotliwości opłacania składek przez klientów (wykres 7). Podane wady należałoby usunąć, by utrzymać silną pozycję na rynku wypracowaną przez firmę FMG przez minione lata (por. [15]).

Z powyższego wynika, że powodzenie w dystrybucji ubezpieczeń na życie w firmie FMG jest uzależnione od wielu czynników, a sukces osiągają tylko nieliczni, najbardziej zdeterminowani współpracownicy.

## 5. Wnioski

1. Współpracownik firmy pośrednictwa ubezpieczeń na życie FMG International S.A. jest najczęściej człowiekiem dojrzałym, ze znacznym doświadczeniem życiowym i zawodowym w innych branżach, żonatym (zameżnym), posiadającym dwoje dzieci, dobrze wykształconym, będącym dwuzawodowcem, traktującym pracę w ubezpieczeniach jako dodatkową i najczęściej niepracującym w wyuczonym zawodzie.
2. W firmie FMG International S.A. istnieje duża fluktuacja kadry ubezpieczeń na życie, gdyż najwięcej współpracowników ma staż pracy do 3 lat, a ich osiągnięcia zawodowe, mierzone ilością przyznanych przez firmę punktów ze sprzedaży polis, są niskie.
3. Głównym motywem podjęcia pracy przez ankietowanych w omawianej firmie było wyobrażenie o zarobieniu znaczących pieniędzy.
4. Świadomość współpracowników ubezpieczeń życiowych w firmie FMG International S.A. co do ważności wykupu dla człowieka tego ubezpieczenia wzrasta znacząco z chwilą rozpoczęcia pracy w tej firmie.
5. Ankietowani ocenili swoje aktualne sukcesy jako małe, lecz uważali, że ich możliwości w tym zakresie są znacząco wyższe. Za przyczynę swych niepowodzeń podawali niedoskonałości osobiste, a skuteczny – w ich mniemaniu – współpracownik powinien być: konsekwentny, pracowity, wytrwały i odporny na stres.
6. Ankietowani dostrzegają wady i zalety firmy pośrednictwa ubezpieczeń na życie FMG International S.A. oraz towarzystwa ubezpieczeniowego AMPLICO LIFE, którego produkty sprzedają, przez co wartości obydwu wymienionych firm rzutują na skuteczność pracy w sprzedaży ubezpieczeń życiowych.

## Literatura

- [1] Bettger F., *Jak umiejętnie sprzedawać i zwielokrotnić dochody*, EMKA, Warszawa 1995.
- [2] Cialdini R., *Wywieranie wpływu na ludzi*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 1999.
- [3] Covey S.R., *Zasady działania skutecznego przywódcy*, Medium, Warszawa 1991.
- [4] Dembowska B., *Ubezpieczenia na życie jako produkt marketingowy*, „Zeszyty Naukowe WSHE”, nr 4, Łódź 2000.
- [5] Dembowska B., *Społeczno-demograficzne uwarunkowania przyczyn nie zawierania umów ubezpieczeń na życie*, „Zeszyty Naukowe WSHE”, nr 1, Łódź 2003.
- [6] Egehan M., *Podstawy zarządzania. Informacje dydaktyczne dla studentów*, Akademia Polonijna, Częstochowa 2002.
- [7] Grabiec A., *Studenci szkół wyższych o ubezpieczeniach na życie*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” 2004, nr 1–2.
- [8] Hopkins T., *Sztuka sprzedawania*, Read Me, Łódź 1999.
- [9] Kołodziejczyk-Olczak I., Kądziołka-Sabanty A., *Profil kompetencyjny przedstawiciela handlowego*, „Personel” 2004, nr 1.
- [10] Konturek S., *Fizjologia człowieka*, t. 4, *Neurofizjologia*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1998.
- [11] Kotler P., *Marketing*, Gebethner i Spółka, Warszawa 1994.
- [12] Kowalewski E., *Ocena ustawy o pośrednictwie ubezpieczeniowym*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe” 2004, nr 3–4.
- [13] Lisiecki K., *Ubezpieczenia na życie w perspektywie przystąpienia Polski do Unii Europejskiej*, „Zeszyty Naukowe WSHE”, nr 1, Łódź 2003.
- [14] Monkiewicz J., *Podstawy ubezpieczeń*, Poltext, Warszawa 2002.
- [15] „News” – Biuletyn Informacyjny Financial Marketing Group International S.A., 2005, nr 1.
- [16] Pazio N., Formanowska A., *Struktura świadomości ubezpieczeniowej w świetle badań*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe”, 2002, nr 3–4.
- [17] Pilch T., *Zasady badań pedagogicznych*, Warszawa 1998.
- [18] Rodek K., Wisan J., *Marketing ubezpieczeń na życie*, Poltext, Warszawa 1997.
- [19] Syrek E., *Problemy zdrowotne dzieci z rodzin dysfunkcyjnych – potrzeba edukacji prozdrowotnej*, [w:] *Zdrowie: istota, diagnostyka i strategię zdrowotne. Materiały Międzynarodowej Konferencji Naukowej, Krynica Górská 1999*, red. I. Murawow, Radom 2001.
- [20] Tracy B., *Maksimum osiągnięć*, MUZA S.A., Warszawa 1998.
- [21] Tracy B., *Osobowość lidera*, Studio EMKA, Warszawa 2001.

## Summary

### **Image of a Life Insurance Sales Agent Employed by FME Insurance Broker**

In this paper collaborators of life insurance intermediary company, “Financial Marketing Group International S.A.” (FMG) was characterized. The inquiry study was performed on a population of 162 people of different age and of different professional experience.

The obtained data show that most frequently higher educated, married men, over 49 years old for whose this kind of job was additional profession one, become collaborators of FMG. These people believed in insurance products and their basic motivation in this job was earning money. Their actual success was rather low but evaluation of their insurance possibility was far higher. In consequence, systematic work, obstinacy are the factors that decide about success or failure in insurance profession.

In their own opinion, collaborators of FMG, who were selling in Poland “life policy” of “Amplico Life” insurance company declared that their market position is main advantage among different companies. As a weak part of Amplico Life activity in Poland, correspondents estimated not enough post-sale customer service.

The dynamic insurance changes on the world and on Polish market may alter the above mentioned conditions.



Edyta Mazurek  
Marek Kośny

## **Assessment of Optimal Bandwidth in Decomposition of Redistribution Coefficient<sup>1</sup>**

### **Introduction**

Progressive nature, characterizing most of contemporary income tax systems in developed countries, suggests that tax system is seen as an important instrument of income redistribution. This form of redistribution is, however, one of the most controversial. The first problem is social acceptance: the common consciousness of differences in tax duties sometimes results in sense of unfairness. The second – and more technical – argument against progressive taxation is low efficiency of income redistribution done in this way.

Assessment of redistribution efficiency demands, however, estimation of tax system characteristics, especially redistribution capacity of a given tax schedule. The most popular coefficient, measuring extent of redistribution is given as a difference between concentration indices before and after taxation. It is a measure of effective redistribution, comprising both redistribution resulting from progressive tax scale and redistribution being a consequence of unintended tax inequity. Separation of these two effects – and assessment of a theoretical redistribution capacity of the tax schedule – is possible thanks to decomposition of redistribution coefficient. However, this redistribution involves dividing the whole population into groups with identical (or similar) income. Obtained results suggest strong dependence of decomposition results on the choice of income bandwidth, but there exists no method that enables unambiguous choice of this bandwidth.

In this paper we present analyses of relation between redistribution coefficient values and income bandwidth, and some criteria for choosing this band-

---

<sup>1</sup> Paper was presented at the XXVI Seminarium Ekonometryczne im. Profesora Zbigniewa Pawłowskiego in Osieczany, 2008 and will be published in Polish in conference proceedings.

width. We also propose some other, possible criteria that could be useful in practical applications.

This paper is prepared within a joint research, done in collaboration with prof. Achille Vernizzi, University of Milan. In this place we would like to acknowledge his remarks and suggestions that helped us a lot. Of course, all errors and omissions are ours.

### Redistribution measurement

The basic index, used in redistribution measurement is *RE* coefficient, defined as follows (cf. 0):

$$RE = G_Y - G_{Y-T} \quad (1)$$

where  $G_Y$  denotes Gini index for income before taxation and

$G_{Y-T}$  – Gini index for income after taxation.

The value of this coefficient could be interpreted as a percentage of income that is transferred from the richer to the poorer as a result of diversified tax rates. This kind of redistribution does not take the form of direct money transfers. It is a hypothetical value of such transfers that should be made in case of hypothetical, proportional tax system to get the tax distribution identical to the analysed one.

Decomposition of Gini index that forms the basis for construction of the redistribution coefficient, enables to isolate between-group ( $G_Y^B$ ) and within-group ( $G_Y^W$ ) inequality. This property results in possibility of decomposition of *RE* coefficient. The main goal of this decomposition is an answer to the question: to what extent the overall redistribution is a consequence of intentional construction of the tax system and to what extent is it restricted by tax inequity? The first component could be interpreted as a measure of actual, theoretical redistribution capacity, while the second reflects undesired – and often unintended – effects of the taxation.

Generally, decomposition of *RE* coefficient could be written as

$$RE = V - H - R \quad (2)$$

where *V* is a measure of vertical effect (decrease in inequality, resulting from tax system progressivity) and *H* reflects horizontal inequity (unequal treatment of

equals). Differences in inequality levels, resulting from changes in order of taxpayers with respect to income before and after taxation, are captured by component R.

As mentioned above, calculation of *RE* coefficient decomposition has to be preceded with a division of the taxpayers' population into groups, distinguished from the point of view of the income.

Let  $Y$  be a vector of non-decreasing incomes before taxation for  $n$  taxpayers:

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n,$$

and taxpayers are grouped (with respect to income) into  $k$  classes, consisting of  $n_1, n_2, \dots, n_k$  taxpayers respectively. Analogously,  $Y-T$  would denote incomes after taxation.

There are proposed in the literature several methods of decomposing *RE* coefficient. The first such a decomposition was described by Kakwani (cf. [2]):

$$RE = V^K - R^{APK},$$

where:

$$V^K = G_Y - D_{Y-T} \text{ (Reynolds-Smolensky redistribution index),}$$

$$R^{APK} = G_{Y-T} - D_{Y-T} \text{ (Atkinson-Plotnick-Kakwani index),}$$

and

$D_{Y-T}$  is a concentration index for income after taxation, calculated in the same way as Gini index but for data ordered by income before taxation.

Because decomposition assumes division of taxpayers into groups with exactly equal incomes, horizontal effect is equal to zero. It is known, however, that division of population into exact-equal groups is very difficult (or even impossible) in practical applications. Therefore, consecutive decomposition on *RE* coefficient allows division into groups with similar incomes. Below we present three decomposition methods that take into account such "close-equal" groups.

The first one is a modification of a decomposition proposed by Aronson, Johnson and Lambert (AJL) (cf. 0). AJL method – in the original version – was taking into account groups with exactly equal incomes, but Urban and Lambert (cf. 0) show the possibility of extension on the groups with similar incomes. They introduce smoothed, linear taxation within each group. The rate of this tax is calculated individually for each group as an effective tax rate. Such neutral tax

wipes out redistribution within each group. Then AJL decomposition could be given as (cf. 0):

$$RE = V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}, \quad (3)$$

where:

$$V^{AJL} = (G_Y^B - G_{Y-T}^B) - (G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W),$$

$$H^{AJL} = G_{Y-T}^W - G_{Y-T}^{SW},$$

$$R^{AJL} = G_{Y-T} - G_{Y-T}^B - G_{Y-T}^W.$$

$G_Y^B$  denotes between-group Gini index for income before taxation, where all individual incomes within each group were replaced with average incomes for a given group. Within-group Gini index ( $G_Y^W$ ) is given by the formula:

$$G_Y^W = \sum_k \frac{n_k}{n} \cdot \frac{n_k \bar{Y}_k}{n \bar{Y}} \cdot G_{k,Y}, \quad (4)$$

where  $G_{k,Y}$  denotes Gini index for  $k$ -th group,  $\bar{Y}_k$  – average income in  $k$ -th group. Measures concerning income after taxation are denoted by  $G_{Y-T}^B$  and  $G_{Y-T}^W$  respectively. Within-group Gini index  $G_{Y-T}^{SW}$  is calculated in an analogous way as given by (4), but for the income after taxation and smoothed tax. If  $y_1, y_2, \dots, y_{n_k}$  are the incomes in  $k$ -th group and  $t_1, t_2, \dots, t_{n_k}$  are respective tax amounts, smoothed tax for  $i$ -th taxpayer (belonging to  $k$ -th group) is given by

$$t_i^s = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} t_i}{\sum_{i=1}^{n_k} y_i} \cdot y_i = g \cdot y_i.$$

Other decomposition method was proposed by van de Ven, Creedy and Lambert (VCL) (cf. 0). It is given by the formula:

$$RE = V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}, \quad (5)$$

where:

$$V^{VCL} = G_Y^B - G_{Y-T}^B,$$

$$H^{VCL} = G_{Y-T}^W - G_Y^W$$

Van de Ven, Creedy and Lambert allow decomposition for taxpayers with similar (not necessarily exact) incomes. At the same time they assume – as in the AJL model – that taxation causes no change in order of both taxpayers and groups of taxpayers. The latter means the same order of average incomes (within defined groups of “close-equals”) before and after taxation.

The last decomposition method-UL method, presented in this paper, takes the following form (cf. 0):

$$RE = V - H - R^{APK}, \quad (6)$$

where:

$$V = V^{VCL} - (G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W) + (G_{Y-T}^B - D_{Y-T}^B),$$

$$H = D_{Y-T}^W - G_{Y-T}^{SW}$$

$D_{Y-T}^B$  is between-group and  $D_{Y-T}^W$  within-group concentration index for income after taxation. Both indices are defined analogously to  $G_{Y-T}^B$  and  $G_{Y-T}^W$ , but incomes are ordered as if they were incomes before taxation. If taxation causes no change of order, concentration indices  $D$  take the same values as respective Gini indices.

Contrary to the earlier mentioned decompositions, UL method takes into account possibility of incomes re-ranking. This change of order could be observed both in case of individual incomes (within one group or even between groups) and in case of whole groups (when average incomes in groups are re-ordered).

### Income bandwidth definition

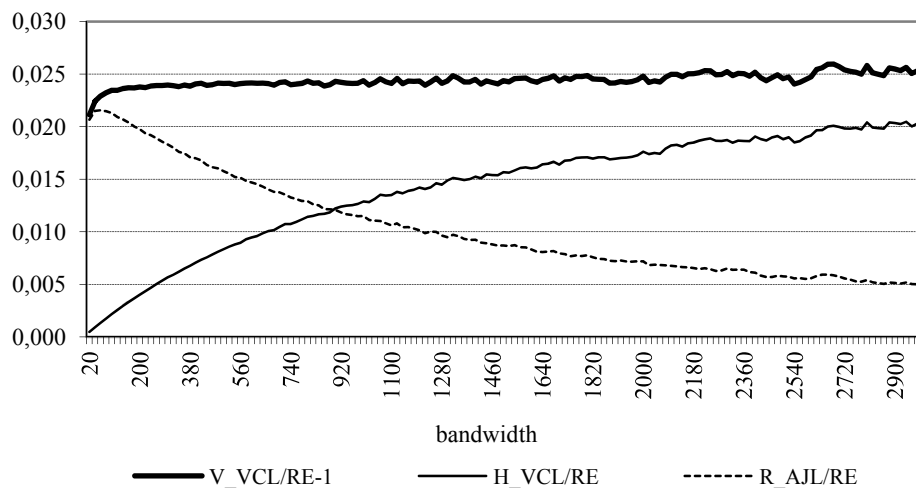
Decomposition methods, presented in the previous section require division of the whole population into groups of taxpayers with similar income. To this end, suitable bandwidth has to be chosen and all the taxpayers have to be assigned to classes with respect to their income before taxation.

Obtained results strongly depend on the bandwidth  $h$ . The influence of the choice of the bandwidth on decomposition results (given by formula (5)) is presented in the Figure 1. Calculations were made for bandwidths ranging between 20 PLN and 3000 PLN. With increase of the bandwidth, it could be observed rise in share of  $H^{VCL}$  in  $RE$  and decrease of  $R^{AJL}$  share. Vertical effect  $V^{VCL}$  is

on a slight increase. These diversified results suggest necessity of the proper choice of the income bandwidth.

Van de Ven, Creedy and Lambert (cf. 0) propose to use bandwidth that maximises vertical effect –  $V$ . Taking into account that overall decomposition ( $RE$ ) could be unambiguously calculated from individual data (it does not depend on decomposition method), maximising  $V$  leads to maximum overall tax inequity, resulting from “errors” of tax system ( $H+R$  – cf. formula (2)). At  $V$ -maximising bandwidth, measure of intended tax progression and redistribution (given in the form of tax schedule) will not be underestimated. Van de Ven, Creedy and Lambert suggest choosing the bandwidth that maximises  $\frac{V}{RE}$ . However, when this function has more than one maximum or is very irregular, finding an optimal bandwidth could be very troublesome – what is pointed out by Vernizzi and Pellegrino (cf. 0).

Our empirical analyses indicate irregular behaviour of  $\frac{V}{RE}$  and problems with finding the global maximum. Therefore, above characterized method of choosing an optimal bandwidth will not be taken into account in the next of this paper.



**Figure 1.** Relation between bandwidth and VCL decomposition results

Source: own calculations.

Vernizzi and Pellegrino (hereafter VP – cf. 0) recommend using bandwidth that equalises losses in redistribution (“errors” of the tax system) given by for-

mulas (3) (5) and (6). They analyse differences between the redistribution measures in these three decompositions, and recommend choosing the bandwidth that minimises maximal differences  $|V - V^{VCL}|$ ,  $|V - V^{AJL}|$  and  $|V^{VCL} - V^{AJL}|$ , stating that the highest value among  $V$ ,  $V^{VCL}$  or  $V^{AJL}$  for a given bandwidth is no lower than the lowest global maximum.

Finally, VP criterion comes down to the choice of the bandwidth for which  $G_{Y-T}^B - D_{Y-T}^B = G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W$ , where  $G_{Y-T}^B - D_{Y-T}^B = R^{EG}$ .

However, apart from decompositions of redistribution coefficient mentioned above, others are proposed in the literature. Therefore, the natural question arises, how could be justified choice of the decompositions taken into account.

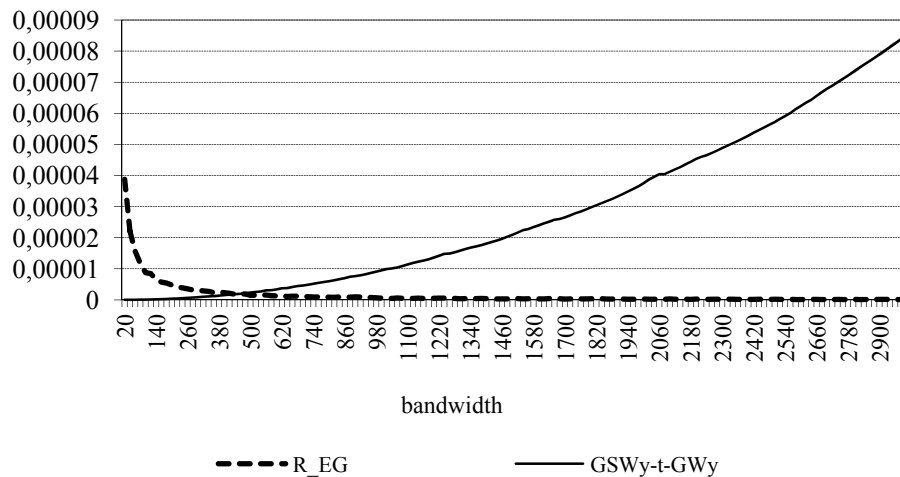
In authors' opinion, classes consisting of taxpayers with approximately the same income, should be as similar as possible to the classes consisting of taxpayers with exactly equal income. Therefore, characteristics of "close-equals" classes should reflect characteristics of the "exact-equals" classes. It means that within-group inequality should stay at the approximately the same level ( $G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W$  should be minimised).

Moreover, order of average (in classes) incomes after taxation should not be changed ( $R^{EG} = G_{Y-T}^B - D_{Y-T}^B$  should be possibly small). Figure 2 displays behaviour of both  $G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W$  and  $R^{EG}$  in relation to the bandwidth chosen. It could be observed that  $R^{EG}$  diminishes within increase in income bandwidth. In case of  $G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W$  this behaviour is opposite. To minimise values of both  $G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W$  and  $R^{EG}$  we propose to choose income bandwidth satisfying following conditions:

$$R^{EG} + (G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W) \text{ is minimal, or} \quad (7)$$

$$R^{EG} = G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W. \quad (8)$$

The second proposal is identical to VP criterion.



**Figure 2.** Relation between bandwidth,  $R^{EG}$  and  $G_{Y-T}^{SW} - G_Y^W$

Source: own calculations

Moreover, on the basis of empirical investigation, described in the next section, we observed that bandwidths resulting from the VP criterion and criteria given by formulae (7) and (8) are very close to each other. We also observed that this bandwidth could be approximated by the formula:

$$h^{MeMo} = \frac{Me - Mo}{10}, \quad (9)$$

where  $Me$  and  $Mo$  denote median and mode for income before taxation respectively. This formula seems to be valid only for Polish data, but for different subsets of taxpayers. It has two main advantages over criteria presented earlier. Firstly, this method requires no extensive calculations. Secondly, this criterion (such as criteria given by (7) and (8)) does not depend on choice of the decomposition method.

Empirical results concerning application of the characterized criteria are presented in the next section.

## Empirical analysis

The empirical part of this paper is based on the tax data from two Lower-Silesian revenue offices. This data concern fiscal year 2001 and contain informa-



tion on income and tax paid. In the analysis we distinguished 4 groups of individual taxpayers, taking into account kind of tax form and place of residence:

- Group 1 – individual taxpayers, living in Wrocław and filling form PIT-37 (standard sources of income),
- Group 2 – individual taxpayers, living in Wrocław and filling form PIT-36 (income from own business),
- Group 3 – individual taxpayers, living in Wałbrzych and filling form PIT-37 (standard sources of income),
- Group 4 – individual taxpayers, living in Wałbrzych and filling form PIT-36 (income from own business).

For each group, optimal bandwidth – in the sense of three criteria, given by (7), (8) and (9) – was calculated. Then, for these bandwidths, decomposition results were assessed. Results are presented in Tables 1–4.

**Table 1.** Decomposition results for taxpayers from Group 1

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{AJL}$	$H^{AJL}$	$R^{AJL}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,013149 100%	0,013462 102,38%	0,000101 0,77%	0,000212 1,61%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,013149 100%	0,013462 102,38%	0,000084 0,64%	0,000229 1,74%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,013149 100%	0,013459 103,36%	0,000138 1,05%	0,000172 1,31%
x	$RE = V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{VCL}$	$H^{VCL}$	$R^{AJL}$
	$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,013149 100%	0,013464 102,40%	0,000103 0,79%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,013149 100%	0,013464 102,40%	0,0000855 0,66%	0,000229 1,74%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,013149 100%	0,013465 102,40%	0,000143 1,09%	0,000172 1,31%

**Table 1.** Decomposition results for taxpayers from Group 1 (cont.)

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V - H - R^{APK}$			
	$RE$	$V$	$H$	$R^{APK}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,013149 100%	0,013464 102,40%	-0,000001 0,00%	0,000316 2,40%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,013149 100%	0,013465 102,40%	-0,000000 0,00%	0,000316 2,40%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,013149 100%	0,01346 102,37%	-0,000004 -0,03%	0,000316 2,40%

Source: own calculations

**Table 2.** Decomposition results for taxpayers from Group 2

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{AJL}$	$H^{AJL}$	$R^{AJL}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,062576 100%	0,063042 100,74%	0,000153 0,24%	0,000313 0,50%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,062576 100%	0,063042 100,74%	0,000127 0,20%	0,000338 0,54%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,062576 100%	0,063052 100,76%	0,000158 0,25%	0,000317 0,51%
x	$RE = V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{VCL}$	$H^{VCL}$	$R^{AJL}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,062576 100%	0,063067 100,79%	0,000178 0,29%	0,000313 0,50%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,062576 100%	0,063057 100,77%	0,000143 0,23%	0,000338 0,54%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,062576 100%	0,063078 100,80%	0,000185 0,29%	0,000317 0,51%

**Table 2.** Decomposition results for taxpayers from Group 2 (cont.)

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V - H - R^{APK}$			
	$RE$	$V$	$H$	$R^{APK}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,062576 100%	0,063067 100,78%	-0,000006 -0,01%	0,000498 0,079%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,062576 100%	0,063073 100,79%	-0,000001 0,00%	0,000498 0,79%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,062576 100%	0,063075 100,79%	0,000001 0,00%	0,000498 0,79%

Source: own calculations

**Table 3.** Decomposition results for taxpayers from Group 3

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{AJL}$	$H^{AJL}$	$R^{AJL}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,011044 100%	0,011319 102,49%	0,000074 0,67%	0,000201 1,82%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,011044 100%	0,01132 102,51%	0,000062 0,57%	0,000214 1,94%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,011044 100%	0,011321 102,51%	0,000053 0,48%	0,000224 2,03%
x	$RE = V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{VCL}$	$H^{VCL}$	$R^{AJL}$
	$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,011044 100%	0,01132 102,50%	0,000075 0,68%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,011044 100%	0,011321 102,51%	0,000063 0,57%	0,000214 1,94%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,011044 100%	0,011321 102,51%	0,000054 0,48%	0,000224 2,03%

**Table 3.** Decomposition results for taxpayers from Group 3 (cont.)

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V - H - R^{APK}$			
	$RE$	$V$	$H$	$R^{APK}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,011044 100%	0,01132 102,51%	-0,000002 -0,02%	0,000279 2,53%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,011044 100%	0,011322 102,52%	-0,000001 -0,01%	0,000279 2,53%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,011044 100%	0,011323 102,53%	0,000000 0,00%	0,000279 2,53%

Source: own calculations

**Table 4.** Decomposition results for taxpayers from Group 4

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{AJL}$	$H^{AJL}$	$R^{AJL}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,029943 100%	0,030445 101,68%	0,000229 0,77%	0,000273 0,91%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,029943 100%	0,030451 101,70%	0,000197 0,66%	0,000311 1,04%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,029943 100%	0,030445 101,68%	0,000229 0,77%	0,000273 0,91%
x	$RE = V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}$			
	$RE$	$V^{VCL}$	$H^{VCL}$	$R^{AJL}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,029943 100%	0,030463 101,73%	0,000246 0,82%	0,000273 0,91%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,029943 100%	0,030462 101,73%	0,000208 0,69%	0,000311 1,04%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,029943 100%	0,030463 101,73%	0,000246 0,82%	0,000273 0,91%

**Table 4.** Decomposition results for taxpayers from Group 4 (cont.)

Bandwidth	Decomposition of redistribution coefficient			
	$RE = V - H - R^{APK}$			
	$RE$	$V$	$H$	$R^{APK}$
$R^{EG} = G_{y-t}^{SW} - G_y^W$	0,029943 100%	0,030463 101,74%	-0,000015 -0,05%	0,000535 1,79%
$Min(R^{EG} + G_{y-t}^{SW} - G_y^W)$	0,029943 100%	0,030469 101,76%	-0,000009 -0,03%	0,000535 1,79%
$\frac{Me - Mo}{10}$	0,029943 100%	0,030463 101,74%	-0,000015 -0,05%	0,000535 1,79%

Source: own calculations

For each analysed group, maximum difference between expected redistribution ( $V$ ), calculated for different decomposition methods, equaled to about 0,03 percent point.

Moreover, in most cases estimate for  $V$  do not depend on criterion, applied in order to find an optimal bandwidth. Slightly higher – but also very small – differences are observed in case of estimates for horizontal and re-ranking effect. However, they have no real significance in the process of assessment of redistribution loss, resulting from “errors” in tax system.

## Conclusions

Our results suggest that decomposition of redistribution coefficient strongly depends on the income bandwidth, so it is crucial to appropriately assess this interval. However, all analysed criteria for choosing this optimal bandwidth seem to give similar results – decomposition result do not change much when other criteria are being applied.

## Literature

- [1] Aronson J.P., Jenkins P., Lambert P.J., *Redistributive effect and unequal income tax treatment*, “The Economic Journal”, 1994,104, 262–270.
- [2] Kakwani N.C. (1984), *Welfare rankings of income distributions*, “Advances in Econometrics”, 1984, 3, 191–213.

- [3] Urban I., Lambert P.J., *Redistribution, horizontal inequity and reranking: how to measure them properly*, "Public Finance Review". 2008 (forthcoming).
- [4] Van de Ven J., Creedy J., Lambert P.J., *Close equals and calculation of the vertical, horizontal reranking effects of taxation*, "Oxford Bulletin of Economics and Statistics", 2001, 63, 381–394.
- [5] Vernizzi A., Pellegrino S., *On the Aronson-Johnson-Lambert decomposition of the redistributive effect*, "DEAS, Università degli Studi di Milano", 2007, WP 2007-13.
- [6] Vernizzi A., Pellegrino S., *On determining "close equals groups" in decomposing redistributive and reranking effects*, 2008, mimeo.

## Streszczenie

### Wyznaczenie szerokości przedziałów dochodowych w dekompozycji współczynnika redystrybucji

Najczęściej analizowany współczynnik redystrybucji, wyrażony jako różnica w koncentracji dochodu przed i po opodatkowaniu, stanowi miarę efektywnej redystrybucji, obejmującej zarówno redystrybucję wynikającą z progresywnej konstrukcji systemu podatkowego, jak i redystrybucję stanowiącą konsekwencję niezamierzonej niesprawiedliwości opodatkowania. Rozdzielenie tych komponentów umożliwia dekompozycja współczynnika redystrybucji, zaproponowana przez Kakwanię a następnie wielokrotnie analizowana i modyfikowana przez innych autorów. Przeprowadzone badania wskazują jednak, że jednym z elementów istotnie wpływających na wyniki dekompozycji jest wybór szerokości przedziałów klasowych dla dochodu. Jednocześnie w literaturze brak jest jednoznacznych wyników odnośnie optymalnego wyboru tej szerokości. W tym kontekście celem artykułu jest prezentacja wybranych kryteriów wyboru szerokości przedziału oraz propozycja innych, możliwych rozwiązań w tym obszarze. Przedstawione zagadnienia zilustrowane zostały wynikami analiz, przeprowadzonych na danych podatkowych, pochodzących z wybranych urzędów skarbowych Dolnego Śląska.

Artykuł powstał w wyniku współpracy z prof. Achille Vernizzim z Uniwersytetu w Mediolanie, któremu składamy serdeczne podziękowania za uwagi i sugestie bardzo pomocne zarówno przy przeprowadzanych badaniach, jak i pisaniu artykułu.

Edyta Mazurek

## A Note of the Identification of the Bandwidth for the Potential Redistribution Index Evaluation

The income redistribution brought by a tax system is basically measured by the *RE* index, which is defined as the difference between the pre-tax Gini index and the post tax- one (cf. 0). In order to evaluate the “potential” vertical redistributive power of a tax system, together with unfairness which lowers the redistributive potentiality, Lambert et al. [1], [2] and [3] suggest to look for equal pre-tax incomes sets.

Making use of Gini index decomposition properties, the authors show that the redistribution index can be written as

$$RE = G_y - G_{yt} = V - H - R . \quad (1)$$

In expression (1) *V* measures the redistribution that would have occurred if equals had been treated equally: it is called as the potential vertical effect. *H*, the horizontal effect, is interpreted as the loss in the redistributive effect accounted for by the unequal treatment of equals. *R*, the reranking effect, is the loss in the redistributive effect caused by the difference in pre-tax and post-tax rankings of income units. All these effects are extensively discussed in 0 and 0.

The trouble is that, estimation of the vertical *V*, horizontal (*H*) and reranking (*R*) effect of a tax system would require division of population into groups of individuals with exactly the same pre-tax income. Being almost impossible to determine groups of exact pre-tax incomes in real data bases, groups of approximate or close equal pre-tax incomes should be determined: from which it derives the problem to determine “who is the equals” and this necessarily involves grouping of almost equal incomes. This problem is solved by determining contiguous groups in the pre-tax income parade, by partitioning the whole income range into equal income intervals: it follows that in this approach it results to be crucial the decision about such intervals width, as all measures in the right hand side of (1) depend on the income bandwidth. The choice of such a bandwidth

should be tackled according to optimality criterions. The main aim of this paper is look through the problem of defining groups of close equals, by considering in detail some of the suggestions proposed in the literature. In this paper the following  $RE$  decompositions will be considered:

1. The Aronson, Johnson, Lambert decomposition (AJL) (cf.0):

$$RE = V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}$$

2. Van de Ven, Creedy, Lambert decomposition (VCL) (cf.0):

$$RE = V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}$$

3. Urban, Lambert decomposition (UL) (cf. 0):

$$RE = V^{UL} - H^{UL} - R^{APK}$$

Van de Ven, Creedy, Lambert suggested choosing the bandwidth where  $V^{VCL}$  is maximum; their criterion was applied for  $V^{UL}$  by Kim and Lambert (cf. 0) and, analogously, it could be applied also for  $V^{AJL}$ .

Recently Vernizzi and Pellegrino [10] (VP) have suggested choosing the bandwidth which minimizes the ratio:

$$\Phi = \frac{\max\{|V^{VCL} - V^{UL}|, |V^{VCL} - V^{AJL}|, |V^{AJL} - V^{UL}|\}}{\min\{V^{VCL}, V^{AJL}, V^{UL}\}} \quad (2)$$

The rationale for (2) stays in the doubt that each of the three above reported measures consider some important aspects which should be taken into account, without being able to be exhaustive: (2) represents then a conservative compromise. In this paper it is extensively investigated how VCL and VP criterions behave in the framework of income and tax data collected by two Lower-Silesian revenue offices.

The experiment was conducted on Polish data coming from two Lower-Silesian tax offices from 2001, pooled together. This set of data contains information on income and tax paid for individuals and household resident in the Municipality of Wrocław and Wałbrzych. After deleting observations with non-positive gross income, the whole population consists in 130 494 individuals. The analysis were performed by autor's own programmes written in the "R" language.

In order to conduct the experiment on two different distributions, incomes where aggregated according to families and then considered both as

1. total family income (symbol – *total income*)  
and as
2. per-spouse family income (symbol – *per spouse income*).



Obviously a criterion is better than another if it returns bandwidth for which we receive an estimate of vertical effect close to the true vertical effect. The trouble is that we do not know the true vertical effect so it is not quite to judge this criterions from this point of view. Even if we cannot evaluate the three  $V$ 's under from their capabilities in measuring the unknown true potential redistribution index, we may at least request that their identification is obtained by a regular and smoothed function. So we can check how regular is the path which leads to optimal values according either to VCL or VP criterion.

On the basis of empirical analysis the regularity measures for VP Criterion are equal to 15.56 (minimum is 10) for per-spouse income and 22.22 for total income: they appear to be much lower than the corresponding ones for VCL criterion. For VCL criterion the stability measures are, respectively, 104.44 (per-spouse income) and 90 (total income) for  $V^{AJL}$ ; when maximizing  $V^{UL}$  they are 47.78 and 76.77. In the context of the here considered distributions the bandwidth which maximizes  $V^{UL}$  appears to be more regular than that for maximizing  $V^{AJL}$ , however the bandwidth which minimizes  $\Phi$  looks to be incomparable superior to both of them.

To sum up the behavior of the redistribution indexes proposed by Urban and Lambert (2008) are analysed using the real income data. The empirical evidence that derives from the data base on individuals and household resident in the Municipality of Wrocław and Wałbrzych, confirms UL's suggestion to look to other indexes than  $V^{VCL}$  as a measure of the potential redistribution: the bandwidth which maximizes  $V^{VCL}$  is too large to be considered as including close equals. When applying VCL maximization criterion to  $V^{UL}$  and  $V^{AJL}$ , as Kim and Lambert do for the former, the resulting bandwidths can be considered as containing what might actually looked at as close equals. However, if the step for the grid search is accurate,  $V^{UL}$  and  $V^{AJL}$  curves appear to be very irregular: they show several local maxima so that the absolute maximum appears to be irregular.

In order to override this problem, VP criterion can be applied. This criterion is a compromise of the three indexes and so it preserves the desirable properties that each index owns. Moreover the minimum of the ration which identifies VP optimal bandwidth appears to be quite regular.

## Literature

- [1] Aronson J.P., Lambert P.J., *Inequity decomposition analysis and Gini coefficient revised*, The Economical Journal, 1993,103, pp. 1221–1227.

- 
- [2] Aronson J.P., Lambert P.J., *Decomposing the Gini coefficient to reveal the vertical, horizontal and reranking effects of income taxation*, National Tax Journal, 1994,47, pp. 273–294.
- [3] Aronson J.P., Johnson P.J., Lambert P.J., *Redistributive effect and unequal income tax treatment*, The Economical Journal, 1994, 104, pp. 262–270.
- [4] Kakwani N.C., *On the measurement of tax progressivity and redistributive effect of taxes with applications to horizontal and vertical equity*, Advances in Econometrics, 1984, 3, pp. 149–168.
- [5] Kim K., Lambert P.J., *Redistributive Effect of U.S. Taxes and Public Transfers, 1994-2004*, Public Finance Review, 20, n. 10, 2008, pp. 1–24.
- [6] Lambert P.J., *The Distribution and Redistribution of Income. A Mathematical Analysis*, Manchester Univ. Press 1993.
- [7] R Development Core Team (2008) R: A language and environment for statistical computing. R, Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.Rproject.org> 2008.
- [8] Urban I., Lambert P.J., *Redistribution, horizontal inequity and reranking: how to measure them properly*, Public Finance Review 2008 (forthcoming)
- [9] Van de Ven J., Creedy J., Lambert P.J., *Close equals and calculation of the vertical, horizontal and reranking effects of taxation*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 63, 3,2001, pp.381–394.
- [10] Vernizzi A., Pellegrino S., *On determining “close equals groups” in decomposing redistributive and reranking effects*, SIEP, WP 2007-602.

## Abstract

A decomposition of actual redistributive effect was proposed by Aronson Johnson and Lambert in 1992, in order to evaluate the potential redistributive effect. However this decomposition is not univocally determined, but as it can be calculated after having gathered incomes into groups of “close” equals, de facto it depends on the bandwidth chosen to split the income parade into contiguous income groups; it follows that the bandwidth has to be chosen according to proper criteria: Van de Ven, Creedy, Lambert (VCL criterion) propose to choose the bandwidths where potential redistributive indexes are maxima. However the literature proposes more than one index to measure the potential redistribution of a tax system and the maxima associated to each of them do not necessarily coincide and, moreover, they do not generally show a regular sequence of values leading to the global maxima. The main aim of this paper is to contribute to the problem of defining a proper bandwidth which can split the income parade into close equal groups: VCL criterion is considered together to a minima criterion

recently proposed by Vernizzi and Pellegino (VP criterion). Empirical evidence is obtained by a data set of incomes and taxes collected by two Lower-Silesian revenue offices. The analysis were performed by autor's own programmes written in the "R" language.

Keywords: Redistributive effect, close equal group

JEL Classification Numbers: H23; H24



Mauro Mussini  
Biancamaria Zavanella<sup>1</sup>

## **Choosing the Bandwidth for Decomposing the Redistributive Effect: Evidence from Milan Using AMeRiCA Data**

### **1. Introduction**

The literature offers a number of approaches to decompose the total redistributive effect of a tax system into three different components: a vertical effect, an horizontal effect and a reranking effect. In this frame, given the sparseness of exact equals in real world data sets, it arises the issue to suggest a procedure to define the close equals groups optimally in terms of class width. Vernizzi and Pellegrino (2007) suggest a criterion to choose a convenient bandwidth in defining the close equals groups and the aim of this paper is to verify either the coherence or the validity of this criterion. In order to pursue this goal, we analyse the results of the redistributive effect decomposition by comparing the models proposed by Aronson, Johnson and Lambert (1994), van de Ven, Creedy and Lambert (2001) and Urban and Lambert (2008).

As it is known, Aronson, Johnson and Lambert (1994), henceforth AJL, suggest a decomposition of the total redistributive effect based on the assumption that taxpayers are split into groups formed by exact pre-tax equals. In 2001, van de Ven, Creedy and Lambert, hereafter VCL, note that exact pre-tax equals are rarely observed in survey data, so they consider groups of close equals for de-

---

<sup>1</sup> Department of Statistics, University of Milan Bicocca, Milan. E-mail: mauro.mussini1@unimib.it, biancamaria.zavanella@unimib.it.

We would like to thank Maria Monti for helpful comments on earlier versions of this paper. All remaining errors are ours.

Preliminary findings of this paper have been presented at the QOL2008 International Conference, University of Economics, Wrocław.

composing the redistributive effect. In Urban and Lambert (2008), henceforth UL, it is shown that VCL decomposition method does not capture entire reranking effect when reranking occurs within the groups of close equals or among group mean incomes. UL recall the approaches to decompose the redistributive effect presented in the previous works and introduce both a modifications to the original AJL decomposition model when dealing with groups of pre-tax close equals income receivers and a new decomposition of the redistributive effect. This last decomposition captures all forms of reranking.

As said above, Vernizzi and Pellegrino (2007), henceforth VP, suggest a criterion to choose a convenient bandwidth in defining the close equals groups. This criterion is shareable considering together all the quoted decompositions of the redistributive effect and the convenient bandwidth can be chosen analysing the behaviour of the vertical effects obtained by applying the alternative decomposition models.

Using 2004 Italian SHIW<sup>2</sup> data set, VP confine their analysis to bandwidths which ranges from 10 euro to 3000 euro: within this bandwidth range the three alternative measures of vertical effect are higher than the actual redistributive effect. In our analysis we extend the bandwidth range over the limit considered by VP, in order to verify if VP criterion leads to a proper choice even when the investigation is not limited to bandwidths which ensure vertical effects greater than the actual redistributive effect. Moreover in order to investigate if VP results may depend on their particular data set; we base our empirical analysis on AMeRiCA data set, which includes all taxpayers resident in the Milanese area for 2003.

Our empirical analysis shows that for the chosen bandwidth the three alternative measures of vertical effects explain a potential redistribution. This is the main result of the paper. Moreover the analysis of the behaviour of the different redistributive effect components allows us to make more clear to the effect of the income distribution skewness on determining the horizontal effect.

The paper is organized as follows. Section 2 outlines the decomposition methods introduced in the previous literature. Section 3 discusses literature suggestions about the choice of the optimal bandwidth, matching them with our empirical evidence which is extensively reported and discussed in section 4. Section 5 is devoted to final remarks.

---

<sup>2</sup> SHIW is the Bank of Italy survey on households incomes and wealth.

## 2. Preliminaries

Let  $G_y$  and  $G_x$  be the Gini coefficients associated with pre-tax and post-tax distributions respectively. The difference  $RE = G_y - G_x$  measures the redistributive effect of taxation. The pre-tax Gini coefficient,  $G_y$ , can be decomposed into three terms (Dagum, 1997)

$$G_y = G_y^b + G_y^w + G_y^t, \quad (1)$$

where  $G_y^b$  is the pre-tax between groups Gini coefficient,  $G_y^w$  is the pre-tax within groups Gini coefficient and  $G_y^t$  is the component due to the presence of overlapping among groups.

When the population of taxpayers is divided into groups which contains exact pre-tax equals occurs that  $G_y^w = 0$  and  $G_y^t = 0$ . Then the decomposition of the pre-tax Gini coefficient across groups becomes

$$G_y = G_y^b. \quad (2)$$

Moving from pre-tax to post-tax income distribution, net incomes may diverge within the same group of pre-tax equals; consequently within groups inequality component becomes different from zero. Moreover post-tax incomes of individuals belonging to different groups may overlap. If this is the case, either the within group term or the overlapping terms becomes different from zero, so that  $G_x$  should be decomposed as in (1)

$$G_x = G_x^b + G_x^w + G_x^t. \quad (3)$$

Taking now into account the decomposition for  $G_y$  and  $G_x$  as given in (2) and (3), according to AJL (1994) suggestion, we obtain

$$\begin{aligned} RE &= G_y - G_x^b - G_x^w - G_x^t, \\ RE &= V - H - R^{AJL}. \end{aligned} \quad (4)$$

AJL call  $V = G_y - G_x^b$  vertical effect: it measures the redistribution that would occur if pre-tax equals are treated equally. In (4) the term  $H = G_x^w$  represents the fall of the potential redistribution due to the different taxation of equals, it involves taxpayers that perceive the same level of pre-tax income, so it is termed horizontal effect. The term  $G_x^t = R^{AJL}$  provides the loss of the redis-

tributive effect arising from the difference in pre-tax and post-tax ranking of taxpayers. In (4) framework,  $R^{AJL}$  coincides with the Atkinson-Plotnick-Kakwani index of reranking,  $R^{APK}$ , which measures the reranking effect moving from pre-tax to post-tax income distribution when income units are ungrouped (Atkinson 1980, Plotnick 1981, Kakwani, 1984).

Due to the sparseness of exact pre-tax equals in survey data sets, VCL adapt the decomposition model described above when groups are formed by pre-tax close equals rather than by exact equals. When considering groups of close equals, one assume the presence of inequality within groups before taxation then the pre-tax Gini coefficient does not reduce to the between component but it is given by the sum of the Gini between and within components ( $G_y^b$  and  $G_y^w$ ).

VCL suggest the following redistributive effect decomposition

$$\begin{aligned} RE &= G_y^b + G_y^w - G_x^b - G_x^w - G_x^t, \\ RE &= V^{VCL} - H^{VCL} - R^{AJL}, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $V^{VCL} = (G_y^b - G_x^b)$ ,  $H^{VCL} = (G_x^w - G_y^w)$  and  $R^{AJL} = G_x^t$ .

Both AJL and VCL approaches assume that reranking does not occur among group mean incomes and within group orderings. If this is not the case,  $R^{AJL}$  does not measure the entire reranking which results from taxation, but only reranking which involves income units belonging to distinct groups. However UL, considering the empirical evidence, notice that these forms of reranking are not rare in micro data sets. To solve this problem they introduce a decomposition method that capture all forms of reranking.

Firstly UL adapt the original AJL decomposition model when dealing with close equals groups. They consider an artificial tax system which treats proportionally taxpayers within each group. According to this tax system, the group average tax rate is applied to pre-tax incomes within each group of close equals, in order to maintain the same within group inequality after and before tax<sup>3</sup>. However the smoothed within group Gini coefficient  $G_x^{sw} = \sum_k a_{k,x} G_{k,y}$  is generally different from the pre-tax Gini coefficient  $G_y^w = \sum_k a_{k,y} G_{k,y}$ , because the generic post-tax weight  $a_{k,x}$  may differ from the corresponding pre-tax one,  $a_{k,y}$

<sup>3</sup> This method produces a smoothing effect within groups of close equals that in the case of exact equals groups is obtained when each net income is replaced by the respective group mean income after tax. Hence, maintaining a proportional tax rate within groups, the post-tax Gini coefficient referred to each group remains equal to the pre-tax one.



(see VP, 2007). Introducing smoothed taxation within groups of close equals, the AJL decomposition model becomes

$$\begin{aligned} RE &= G_y - G_x^b - G_x^{sw} + G_x^{sw} - G_x^w - R^{AJL}, \\ RE &= V^{AJL} - H^{AJL} - R^{AJL}. \end{aligned} \tag{6}$$

In expression (6) the term  $V^{AJL} = G_y - (G_x^b + G_x^{sw})$  measures the vertical effect obtained by the difference between the pre-tax Gini coefficient and the Gini coefficient for the income distribution after smoothed tax.  $H^{AJL} = G_x^w - G_x^{sw}$  measures horizontal effect given by the difference between the actual within group inequality component and the one which results from a smoothed taxation.

As said above in (6), UL extend AJL model to the case when pre-tax close equals groups are considered instead of exact pre-tax equals; however this adjustment does not solve the problems of measuring both reranking within groups and reranking of entire groups (reranking among group mean incomes). With this aim UL propose a new decomposition method by starting from expression (6)

$$\begin{aligned} RE &= G_y - G_x^{sw} - D_x^b - D_x^w + G_x^{sw} - R^{APK}, \\ RE &= V^{UL} - H^{UL} - R^{APK}, \end{aligned} \tag{7}$$

where  $D_x^w$  and  $D_x^b$  are the within group concentration index and the between group concentration index respectively,  $R^{APK} = G_x^b + G_x^w + R^{AJL} - D_x^b - D_x^w$ ,  $V^{UL} = (G_y - G_x^{sw} - D_x^b)$  and  $H^{UL} = (D_x^w - G_x^{sw})$ . Defining  $R^{EG} = G_x^b - D_x^b$  the measure of the reranking among group mean incomes and  $R^{WG} = G_x^w - D_x^w$  the measure of the reranking within groups, the Atkinson-Plotnick-Kakwani<sup>4</sup> reranking index  $R^{APK}$  may be written as  $R^{APK} = R^{EG} + R^{WG} + R^{AJL}$ . Each of the three above considered models has some appealing characteristics and some contradictions. In VCL model  $V^{VCL}$  measures the vertical effect by comparing pre-tax and post-tax between groups Gini coefficients, it follows that it does not consider within group inequality existing before and after tax. Moreover the measure the horizontal effect  $H^{VCL}$  may fail to capture a within group inequality reduction when moving from pre-tax to post-tax income distribution, as  $(G_x^w - G_y^w)$  may result positive even if all post-tax within group Gini coefficients are lower than the corresponding pre-tax ones (see VP, 2007). In AJL modified

<sup>4</sup> Following Kakwani (1984), we observe that, when decomposing by sub-groups each concentration index, we exactly obtain two terms: a within component and a between component.

model the horizontal measure  $H^{ALL}$  seems to be a proper measure for horizontal effect, as  $(G_x^w - G_x^{sw})$  is positive when all pre-tax within group Gini coefficients are lower than the corresponding post-tax ones<sup>5</sup> nevertheless this model does not consider properly the reranking effect of taxation. In UL model  $V^{UL}$  presents the noticeable advantage that it is a term of a decomposition model which captures all forms of reranking; however once again the interpretation of the horizontal effect is not obvious: as UL notice,  $H^{UL}$  may be negative even for relatively small bandwidths, so it should be considered under some arrangements and transformations.

### 2.1. How the vertical effect should be measured?

When close equals are considered the issue related to the choice of a proper bandwidth arises. As the various components of the decomposition change their relative sizes in accordance with the chosen bandwidth. Thus an arbitrary choice can lead to misleading results (VCL, 2001).

VCL and Kim and Lambert (2008) implicitly assume the vertical effect as a proxy of the potential redistribution of the tax system and they suggest to choose the bandwidth which maximizes  $V^{VCL}$  and  $V^{UL}$  respectively.

We are not sure that these suggestions always hold. Considering  $V^{VCL}$ , it may happen that the bandwidth which maximizes the index is quite large<sup>6</sup>, then we can discuss if for that bandwidth the definition of close equals groups holds. In what it concerns  $V^{UL}$ , from our experience, this measure may exhibit irregular trend so that<sup>7</sup> the choice of the maximizing bandwidth is not obvious.

VP (2007) suggest to adopt a kind of synthesizing compromise. Following VCL and Kim and Lambert (2008), they assume the vertical effect as a proxy of the potential redistribution and notwithstanding the partial failure of the aforementioned indices to measure this effect, they believe that each one may account for it. They observe that  $V^{ALL}$  is everywhere lower<sup>8</sup> both than  $V^{VCL}$  and  $V^{UL}$ <sup>9</sup>, and they suggest to choose the bandwidth which satisfies the following criterion:

<sup>5</sup> This is due to weights associated to pre-tax and post-tax within group Gini indices: they are the same either in  $G_x^w$  and in  $G_x^{sw}$ , whilst are different in  $G_y^w$  (see e.g. Vernizzi and Pellegrino 2007).

<sup>6</sup> As we shall see in the pursue, in our data set the maximum  $V^{VCL}$  occurs when the bandwidth is 31,000 euro large (Figure 1B).

<sup>7</sup> As it is shown in Figure 1A, this measure exhibits an irregular decreasing trend so that, at least in our case, it is not clear how to identify the maximum.

<sup>8</sup> VP try to explain why these dominance relationships hold.

<sup>9</sup> UL (2008), observe the same relation between the three vertical effect indices.

$$\min \left( \frac{\max(|V^{VCL} - V^{UL}|, |V^{VCL} - V^{AJL}|, |V^{AJL} - V^{UL}|)}{\min(V^{VCL}, V^{AJL}, V^{UL})} \right) \quad (8)$$

In the pursue we shall deeply analyze how this criterion works in the specific contest of the here considered data set showing that it identifies a bandwidth which is suitable for each of the considered models.

### 3. Empirical application

In this section we use a micro data set to analyse the relationship among VCL, AJL and UL decompositions considering various bandwidths. To examine how sensitive our decomposition results are to the choice of the bandwidth, we investigate the trend of the measures of vertical, horizontal and reranking effect across three different sets of possible income class widths. Each of the three sets considers one hundred contiguous bandwidths, each bandwidth being a multiple of the minimum in the set. The set are organized as follows with respect to the bandwidth. First set minimum 10 euro, maximum is 1,000 euro. Second set minimum 1000 euro, maximum 100,000 euro. Third set minimum 100,000 euro, maximum 10,000,000 euro. This empirical framework extends our analysis on the complete range of possible bandwidths.

The data derives from AMeRiCa Data Warehouse, which provides demographic and income information for individuals and households resident in the Milanese area. AMeRiCa combines administrative micro data from the tax register of the Milan Revenue Agency with personal data from the Milanese Registry Office. We consider data about Italian Personal Income Tax for the population of individuals resident in the Milanese area. For each taxpayer AMeRiCa contains gross income by source, income tax paid, and the amounts of tax allowances and deductions.

Our attention is focused upon the individual income data collected in 2003. After deleting observations with non-positive gross income, we refer to a population composed by 821260 individuals.

#### 3.1. Results

The values for redistributive effect and reranking effect are not conditioned by the choice of bandwidth. The pre-tax Gini coefficient equals 0.5149659 and the post-tax Gini coefficient is 0.4691416, then the redistributive effect (*RE*) equals 0.0455543. The Atkinson-Plotnick-Kakwani index gives 0.0011725 for the total reranking effect. When we decompose these measures, the magnitudes

of the different decomposition terms depend on the chosen bandwidth. In order to choose a convenient bandwidth, in the following we analyze the behaviour of each of the redistribution effects considering the three proposed decomposition models.

#### The vertical effect measures

Figure 1A shows that for very small bandwidths  $V^{UL}$  dominates  $V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$ , however, enlarging the bandwidth,  $V^{UL}$  decreases as  $V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$  increase. For bandwidth larger than 200 euro  $V^{ALL}$  becomes distinguishable from  $V^{VCL}$  and it slopes down below  $V^{VCL}$  line as the bandwidth enlarges. The three measures of vertical effects are close together in correspondence of a bandwidth that approximately ranges from 350 euro to 400 euro; as the bandwidth is widened,  $V^{VCL}$  is over  $V^{UL}$  line and the distance between  $V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$  increases. For bandwidths larger than 500 euro the trend of the three lines becomes more irregular and  $V^{ALL}$  is undistinguishable from  $V^{UL}$ .

In Figure 1B  $V^{UL}$ ,  $V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$  are plotted over a range of bandwidths from 1,000 euro to 100,000 euro. We observe that  $V^{ALL}$  and  $V^{UL}$  lie on the same line, which is below  $V^{VCL}$  line;  $V^{VCL}$  continues to increase up to a bandwidth approximately 31,000 euro large, where it amounts to 113.8 percent of  $RE$ .  $V^{VCL}$  remains greater than  $RE$  for bandwidths lower than 58,000 euro, whilst  $V^{ALL}$  and  $V^{UL}$  becomes lower than  $RE$  for bandwidths approximately larger than 11,000 euro. When the bandwidth becomes larger than 100,000 euro, the three measures show a similar decreasing trend.

Figure 1C extends our analysis by considering a very large range for the bandwidth, that varies from 100,000 euro to 10,000,000 euro. We observe that for bandwidths larger than 1,000,000  $V^{UL}$ ,  $V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$  capture a negligible percentage of  $RE$ ; moreover, when the bandwidth tends to its maximum value, the three measures of vertical effect become closer and closer one another and to their zero limit.

Here again we investigate the magnitude of the divergence among  $V^{UL}$ ,  $V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$  across this complete range of bandwidths by considering the maximum distance among the three computed vertical effect measures. For each bandwidth this maximum distance is defined as follows

$$\Delta_{\max} = \max(|V^{VCL} - V^{UL}|, |V^{VCL} - V^{ALL}|, |V^{ALL} - V^{UL}|) \quad (9)$$

Turning now to the differences between each pair of vertical measures, we observe that  $(V^{VCL} - V^{AJL}) = (G_x^{sw} - G_y^w)$  and  $(V^{UL} - V^{AJL}) = R^{EG}$ ; so the difference between  $V^{VCL}$  and  $V^{UL}$  is given by  $(G_x^{sw} - G_y^w)$  minus  $R^{EG}$ . From Figure 6A we notice that  $R^{EG}$  becomes very small for bandwidths larger than 500 euro, then  $V^{UL}$  and  $V^{AJL}$  become undistinguishable for bandwidths which are 500 euro or more large. Conversely  $(G_x^{sw} - G_y^w)$ , which is very small for the tiniest bandwidths, increases roughly up to 63,000 euro large bandwidths. As shown earlier (Figures 1A and 1B),  $V^{VCL}$  and  $V^{AJL}$  lines overlap up to 200 euro large bandwidths, then  $V^{VCL}$  line is over  $V^{AJL}$  line. For these reasons, when bandwidths are relatively tiny,  $\Delta_{max}$  is given by  $R^{EG}$ , whilst for relatively larger bandwidths it is given by  $(G_x^{sw} - G_y^w)$ . It results that the descending part of the graph represented in Figure 1A is just  $R^{EG}$ , whilst the increasing part is  $(G_x^{sw} - G_y^w)$ . Figure 2B shows that  $(G_x^{sw} - G_y^w)$  presents a reversed U-shape, and in the limit it becomes zero, as shown in Figure 2C.

VP (2007) initially suggest to choose the bandwidth where  $\Delta_{max}$  is minimum, provided that the maximum among the vertical effect measures is not lower than the lowest among their global maxima over the range of bandwidths; however, after having realized that the second part of the condition does not allow a valid application (see Figure 1A), they modify their criterion suggesting to choose the bandwidth where

$$\Phi = \frac{\max(|V^{VCL} - V|, |V^{VCL} - V^{AJL}|, |V^{AJL} - V|)}{\min(V^{VCL}, V^{AJL}, V)} \quad (10)$$

is minimum.

Using this ratio we relate the magnitude of the difference among the three measures of vertical effect to the measure which captures the potential redistribution less than the others for a given bandwidth. Figures 3A, 3B and 3C report  $\Phi$  plotted along the entire range of considered bandwidths. Looking at Figure 3A we note that for the starting bandwidth the ratio takes on a value of 0.00073, enlarging the bandwidth,  $\Phi$  shows a decreasing trend with some irregularities until a bandwidth of 350 euro; for this bandwidth the ratio equals its minimum, then it begins to increase plotting a more regular line than for smaller bandwidths. This rising trend is also confirmed by Figures 3B and 3C which depict an increasing monotonic line for  $\Phi$ .

We conclude that due to its behaviour,  $\Phi$  can be considered as a proper indicator to choose a convenient bandwidth. On one side low values of  $\Phi$  show that  $V^{UL}, V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$  altogether converge to a similar evaluation for the potential redistribution induced by a tax system, and on the other side for low values of  $\Phi$  we exclude bandwidths which lead to not significant values for  $V^{UL}, V^{VCL}$  and  $V^{ALL}$ .

We conclude that if the bandwidth 350 is euro large, the three vertical effects give close results for the potential redistributive effect, and these values are higher than the actual redistributive effect.

#### The horizontal effect measures

The measures of horizontal effect  $H^{UL}, H^{VCL}$  and  $H^{ALL}$  are plotted over the three bandwidth sets considered above. In Figure 5A  $H^{VCL}$  and  $H^{ALL}$  show increasing trends: the former up to 31,000 euro large bandwidth, the latter up to 5,000 euro; moreover  $H^{VCL}$  remains positive until bandwidths are larger than 57,000 euro, whilst  $H^{ALL}$  becomes negative for 12,000 euro large bandwidth.  $H^{UL}$  exhibits a different behaviour: it presents positive, even quite low, values, for bandwidths narrower than 150 euro, then  $H^{UL}$  oscillates around zero until it starts to decrease till its limit  $-RE$ .  $H^{ALL}$  becomes lower than  $H^{VCL}$  for bandwidth larger than 400 Eu. Looking at Figures 5B and 5C, we notice that  $H^{ALL}$  remains lower than  $H^{VCL}$  as the bandwidth are large, and finally both converge to the common limit  $-RE$ . In order to investigate the different behaviours of  $H^{VCL}$  and  $H^{ALL}$ , we recall VP formulae for these measures

$$\begin{aligned}
 H^{VCL} &= G_x^w - G_y^w = \sum_{i=1}^h \left( G_{i,x} \frac{n_i^2 \mu_i (1-t_i)}{n^2 \mu (1-\bar{t})} - G_{i,y} \frac{n_i^2 \mu_i}{n^2 \mu} \right) \\
 H^{ALL} &= G_x^w - G_x^{sw} = \sum_{i=1}^h (G_{i,x} - G_{i,y}) \frac{n_i^2 \mu_i (1-t_i)}{n^2 \mu (1-\bar{t})}
 \end{aligned} \tag{11}$$

where  $\mu$  is mean pre-tax income for the entire population which accounts  $n$  income units,  $\mu_i$  is mean pre-tax income of group  $i$ ,  $n_i$  is the number of income units of group  $i$ ,  $\bar{t}$  is the aggregate tax rate of the entire population, and  $t_i$  is the average tax rate of group  $i$ . We notice that even if  $G_{i,x}$  is lower than  $G_{i,y}$ , as it is likely to expect assuming a progressive taxation, the corresponding weights may induce the difference between the weighted  $G_{i,y}$  and the weighted  $G_{i,x}$  to result

positive. Focusing upon these weights, we point out that for a generic group  $i$  the pre-tax weight differs from the post-tax one by the ratio  $(1-t_i)/(1-\bar{t})$ . When  $t_i < \bar{t}$  holds, the post-tax weight is greater than the weight before tax and the difference between post-tax weighted Gini coefficient and the pre-tax one may result positive. In a scenario of progressive tax schedule, we assume that lower incomes face an average tax rate lower than the aggregate tax rate  $\bar{t}$ . Then the greater the number of incomes lower down the distribution, the more numerous the set of taxpayers who face an average tax rate lower than  $\bar{t}$ . This is the case in presence of skewness, because the income halfway up the distribution is itself below mean income.

From Figure 4, which delineates the density income function for our reference population distribution, we observe that there is evidence of the presence of right skew in the distribution. To explore the effect of the skewness on computing  $H^{VCL}$ , we consider Table 1 which reports average tax rates, Gini coefficients, and weighted Gini coefficient both per decile and per cumulative deciles. We define groups of taxpayers using pre-tax deciles to determine group boundaries.

From part (A) of Table 1 we notice that being post-tax Gini coefficient greater than the respective pre-tax one for deciles from the 1<sup>th</sup> to the 8<sup>th</sup>, within deciles inequality arises after tax. The inequality rise suggests that relative difference between rich and poor increases within these groups moving from pre-tax to post-tax distribution. This regressive effect derives from horizontal inequity<sup>10</sup> and divergence<sup>11</sup> which occur within the here considered groups. These phenomena relates to tax allowances and deductions adopted by the tax system, which cause departures from the actual tax schedule. It is more like that one of these regressive effect is observed when the departures from the actual tax schedule involve income units with low pre-tax income rather than high pre-tax income by two reasons. First, Italian Personal Income Tax adopts tax allowances which are decreasing with respect to pre-tax income level; then the incidence of tax allowances diminishes as income is increased. Secondly, for a fixed allowance amount, its impact on determining the post-tax income is proportionally greater when considering low pre-tax incomes rather than high ones. We turn our attention on deciles from the 1<sup>th</sup> to the 8<sup>th</sup>, and we notice that within each of these groups incomes are low and relatively close; hence it is reasonable that regressive effect occurs within these groups.

<sup>10</sup> The concept of horizontal inequity refers to unequal treatment of equals which arises from departures from effective tax schedule.

<sup>11</sup> Divergence occurs where the richer of two individuals obtains a net gain relative to poorer from pre-tax to post-tax distribution.

**Table 1.** Basic statistic for selected decile groups (pre-tax). Individuals. Milan. 2003.

Decile	INCOME DECILE RANGES										Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Decile upper limit	4826	7401	11197	14307	17136	20301	24419	31017	47280	19057066	
Decile ranges	4826	2575	3796	3110	2829	3165	4118	6598	16263	19009786	
	(A) WITHIN DECILE STATISTICS										
$G_X$	0.408652	0.106611	0.088392	0.060159	0.047637	0.042318	0.037910	0.042961	0.063815	0.346804	/
$G_Y$	0.403979	0.068549	0.068355	0.040424	0.029914	0.028080	0.030661	0.039578	0.070104	0.376421	/
$G_X - G_Y$	0.004673	0.038062	0.020037	0.019735	0.017723	0.014238	0.007248	0.003384	-0.006290	-0.029620	/
$G_X^W$	0.000370	0.000278	0.000374	0.000340	0.000325	0.000338	0.000354	0.000482	0.000941	0.012654	0.016545
$G_Y^W$	0.000313	0.000158	0.000248	0.000201	0.000182	0.000203	0.000265	0.000421	0.001025	0.015462	0.018479
$G_X^W - G_Y^W$	0.000057	0.000120	0.000126	0.000139	0.000143	0.000135	0.000089	0.000061	-0.000085	-0.002810	-0.001934
Average Tax Rate	12.37%	15.19%	12.66%	14.88%	16.21%	17.34%	19.08%	20.97%	24.50%	33.47%	25.10%
Pre-tax Income Share	0.77	2.30	3.62	4.97	6.10	7.25	8.65	10.63	14.63	41.08	100.00
	(B) CUMULATIVE DECILE STATISTICS										
$G_X$	0.408652	0.335178	0.330968	0.322541	0.312348	0.305688	0.304265	0.311286	0.335181	0.469142	/
$G_Y$	0.403979	0.324545	0.319302	0.317794	0.312328	0.309234	0.312087	0.323705	0.355384	0.514696	/
$G_X - G_Y$	0.004673	0.010633	0.011667	0.004747	0.000020	-0.003550	-0.007820	-0.012420	-0.020200	-0.045550	/
$G_X^W$	0.000370	0.002354	0.007683	0.017274	0.031568	0.051743	0.079984	0.121446	0.191593	0.469142	/
$G_Y^W$	0.000313	0.001996	0.006418	0.014838	0.027754	0.046421	0.073549	0.114710	0.188464	0.514696	/
$G_X^W - G_Y^W$	0.000057	0.000358	0.001265	0.002436	0.003814	0.005322	0.006435	0.006737	0.003129	-0.045550	/
Average Tax Rate	12.37%	14.48%	13.50%	14.09%	14.81%	15.54%	16.45%	17.54%	19.27%	25.10%	/
Pre-tax Income Share	0.77	3.07	6.70	11.67	17.77	25.02	33.67	44.30	58.92	100.00	/

Source: own calculations.

If we focus upon the cumulative analysis, reported in part (B) of the Table 1, we see that the difference between the post-tax and the corresponding pre-tax Gini coefficients becomes negative for the 6<sup>th</sup> decile, even though the difference calculated for weighted Gini coefficients ( $G_{i,x}^W - G_{i,y}^W$ ) remains positive until the 9<sup>th</sup> decile. As previously observed, this is due the different weights which are applied to  $G_{9,x}^W$  and  $G_{9,y}^W$ ; in fact for the 9<sup>th</sup> decile  $t_i < \bar{t}$  holds, then the weight of  $G_{9,x}^W$  is greater than  $G_{9,y}^W$  one. This explain why  $H^{AJL}$  becomes negative much before  $H^{VCL}$ , being for the former the pre-tax and the post-tax Gini coefficients weighted by the same coefficients within each group, which is not the case for the latter.



When considering cumulative deciles groups, the number and the disparities of incomes allocated to each group increase, then the incidence of the departures from effective tax schedule diminishes. Looking at the cumulative statistics in Table 1, part B, we observe that the within group inequality starts to decrease from the 6<sup>th</sup> decile, however the weighted post-tax Gini coefficients remain greater than the corresponding pre-tax ones until the 9<sup>th</sup> decile. This is due to the effect of the average tax rate which remains lower than the aggregate tax rate until the 9<sup>th</sup> decile included. Moreover we observe that the magnitude of the positive difference between the weighted post-tax Gini coefficient and the pre-tax one increases together with the population share included within a same group, and its maximum is for the 8<sup>th</sup> cumulative decile; conversely this difference decreases when considering the 9<sup>th</sup> cumulative decile, and it becomes negative for the 10<sup>th</sup> cumulative decile. Our results indicate that  $H^{VCL}$  takes on its maximum value for the bandwidth which leads to include within a same group the lower 80 percent incomes, which happens when the bandwidth is a bit larger than 31,000 euro; when the bandwidth is further enlarged,  $H^{VCL}$  starts to decrease and it becomes negative for bandwidths larger than 58,000 euro. This behaviour can be explained by two reasons. First, when the bandwidth is larger than 31,000 euro lower 80 percent incomes are confounded with a part of top 20 percent income distribution within a same group and, consequently, both disparities and average tax rate increase by including additional incomes from the top 20 percent of income distribution. In addition, according to the progressivity of tax schedule, liabilities are proportionally higher for these incomes, hence the magnitude of inequality reduction within the group should increase when higher incomes are added to the group. Second, enlarging the bandwidth, it is likely to expect that the number of income units included in any group increases, and on the other hand the number of identified groups diminishes. Then the within component of Gini coefficient better captures the disparities among top 10 percent incomes which are widespread along the right tail of the income distribution.

We explain the behaviour of  $H^{VCL}$  and  $H^{AJL}$  focusing on the proportions of population of taxpayers which are split into sub-groups when defining the bandwidth; however our main goal is to separate the redistributive effect by selecting a convenient bandwidth. When considering the selected bandwidth (350 euro),  $H$  is close to zero, whereas  $H^{AJL}$  results positive; then we suggest to consider  $H^{AJL}$  as horizontal inequity measure.

#### The reranking effect measures

Figure 6 outlines the behaviour of  $R^{APK}$  decomposition across the three sets of bandwidths considered here. Looking at Figure 6A, we observe that for nar-

row bandwidths  $R^{AJL}$  represents a high percentage of  $R^{APK}$ , at the starting bandwidth  $R^{AJL}$  equals to the 96.6 percent of  $R^{APK}$  and it reaches its maximum value (97.1 percent) if the bandwidth is 20 euro large, then  $R^{AJL}$  decreases as the bandwidth is widened. While  $R^{WG}$  exhibits an upward trend which seems to be approximately proportional to the bandwidth,  $R^{EG}$  quickly falls by enlarging the bandwidth. If the bandwidth equals 10 euro,  $R^{EG}$  percentage of  $R^{APK}$  is 2.89 percent and it is higher than  $R^{WG}$  one, when the bandwidth is 300 euro or more large,  $R^{EG}$  is lower than 0.5 percent of  $R^{APK}$ . From Figure 6B we observe that, as  $R^{AJL}$  decrease of a certain percentage of  $R^{APK}$ ,  $R^{WG}$  raises of the same percentage amount. This results from the behaviour of  $R^{EG}$  whose percentage of  $R^{APK}$  is close to zero (as noted earlier, looking at Figure 6A), for this reason  $R^{EG}$  is not delineated in Figure 6B. Figure 6C shows that  $R^{WG}$  approximates the value of  $R^{APK}$  when the bandwidth is 800,000 euro or more large.

If we consider a bandwidth 350 euro large, we obtain only two reranking components, that are  $R^{WG}$  and  $R^{AJL}$ , because for this bandwidth  $R^{EG}$  represents a negligible percentage of  $R^{APK}$ .

#### 4. Conclusion

The purpose of this work is to examine the decomposition of the redistributive into vertical, horizontal and reranking components in order to select the bandwidth that is used to split the taxpayers resident in Milan into sub-groups. The choice of the bandwidth determines the magnitude of these components and the relationship among them. In this paper we apply three alternative methods to decompose the redistributive effect obtained moving from pre-tax to post-tax income distribution: the model suggested by Aronson, Johnson and Lambert (1994) and refined by Urban and Lambert (2008), the method proposed by van de Ven, Creedy and Lambert (2001), and the one recently introduced in Urban and Lambert. We recall Vernizzi and Pellegrino (2007) methodology for selecting the bandwidth in order to check whether their criterion identify a proper bandwidth to decompose the redistributive effect which occurs with respect to Milan micro data.

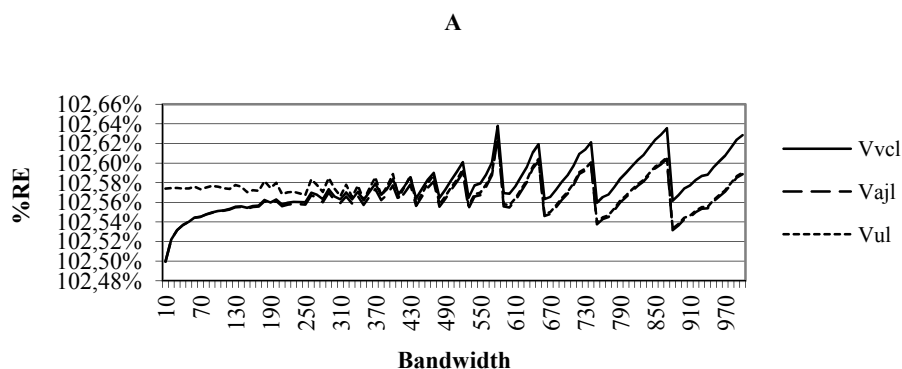
Our findings confirm that the criterion is adequate to set a proper bandwidth to decompose the redistributive effect. From the comparison of the differences among  $V^{VCL}$ ,  $V^{AJL}$ ,  $V^{UL}$  across a broad set of possible bandwidths, we notice that the criterion suggests to choose a bandwidth equal to 350 euro, which ensures

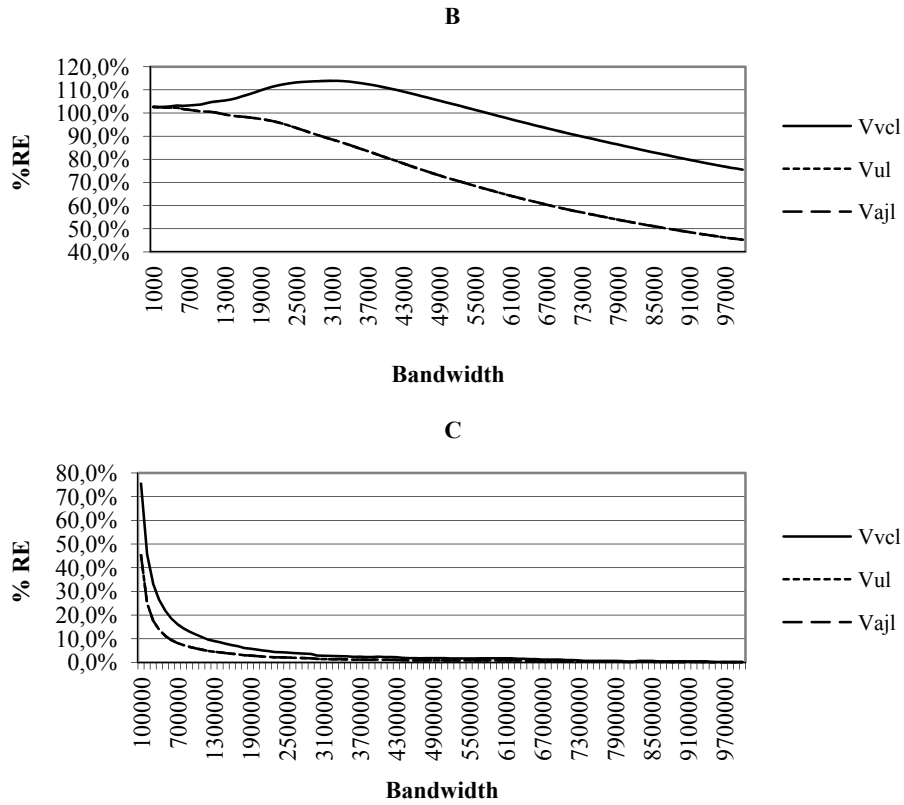
that these alternative measures of vertical effect give coherent outcomes and capture a potential redistribution.

The decomposition of the reranking effect indicates that the reranking which involves group mean incomes (entire-group reranking) becomes a negligible percentage of the total reranking effect when the bandwidths are 300 euro or more large. Then, for larger intervals, any rise of the within-group reranking term is balanced by a fall of the same amount in reranking component that accounts for reranking between income units belonging to different groups.

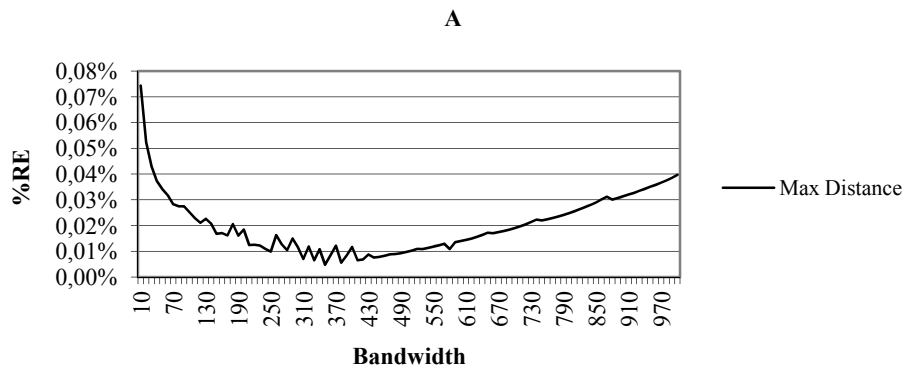
We also obtain results to examine how the skewness of the income distribution affects the determination of the horizontal effect. We explain the behaviour of  $H^{VCL}$  and  $H^{AL}$  focusing on the proportions of population of taxpayers which are split in sub-groups when defining the bandwidth. Our analysis shows that the weights attributed to sub-groups are shifted from pre-tax to post-tax distribution for effect of the sub-groups average tax rates. This determines that the post-tax within Gini coefficient is greater than both the pre-tax within Gini coefficient and smoothed within Gini coefficient, even if sub-groups post-tax Gini coefficients are lower than the corresponding pre-tax ones. We find evidence that lower tax rates are associated with lower 80 percent incomes of the distribution, and hence higher values of  $H^{VCL}$  are obtained when lower 80 percent incomes of the distribution are included within the same group.

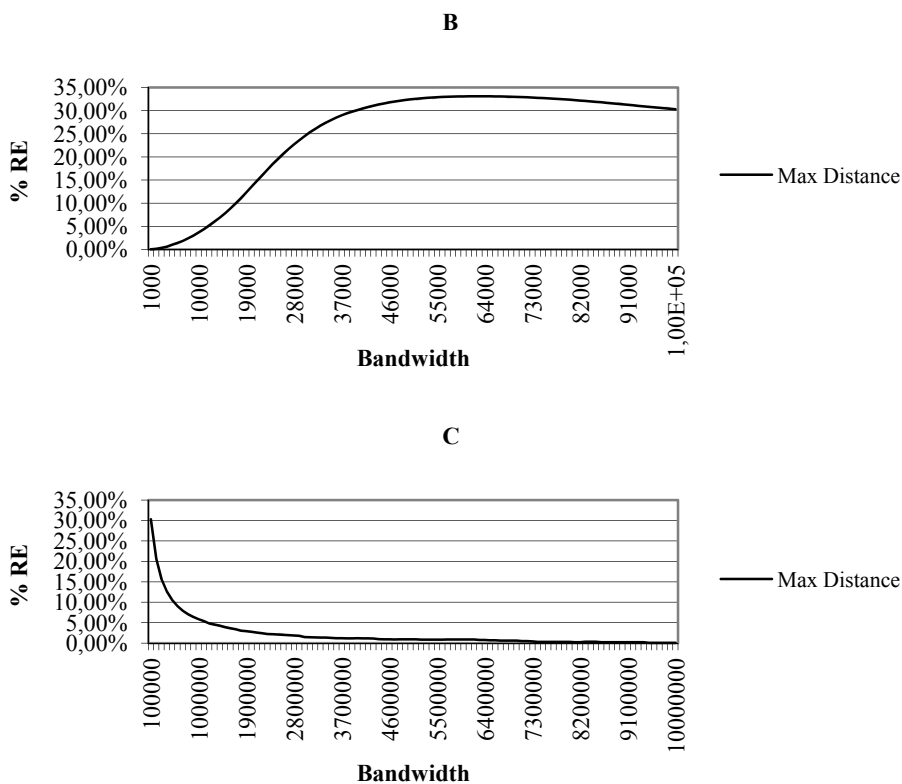
**Figure 1:** Vertical effect plotted over different ranges: (A) from 10 euro to 1,000 euro – increasing step 10 euro; (B) from 1,000 euro to 100,000 euro – increasing step 1,000 euro; (C) from 100,000 euro to 10,000,000 euro – increasing step 100,000 euro.



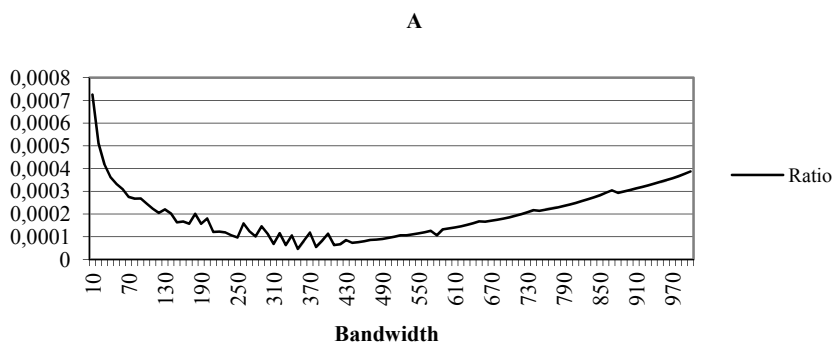


**Figure 2:** Maximum distance plotted over different ranges: (A) from 10 euro to 1,000 euro – increasing step 10 euro; (B) from 1,000 euro to 100,000 euro – increasing step 1,000 euro; (C) from 100,000 euro to 10,000,000 euro – increasing step 100,000 euro.





**Figure 3:** Ratio plotted over different ranges: (A) from 10 euro to 1,000 euro – increasing step 10 euro; (B) from 1,000 euro to 100,000 euro – increasing step 1,000 euro; (C) from 100,000 euro to 10,000,000 euro – increasing step 100,000 euro.



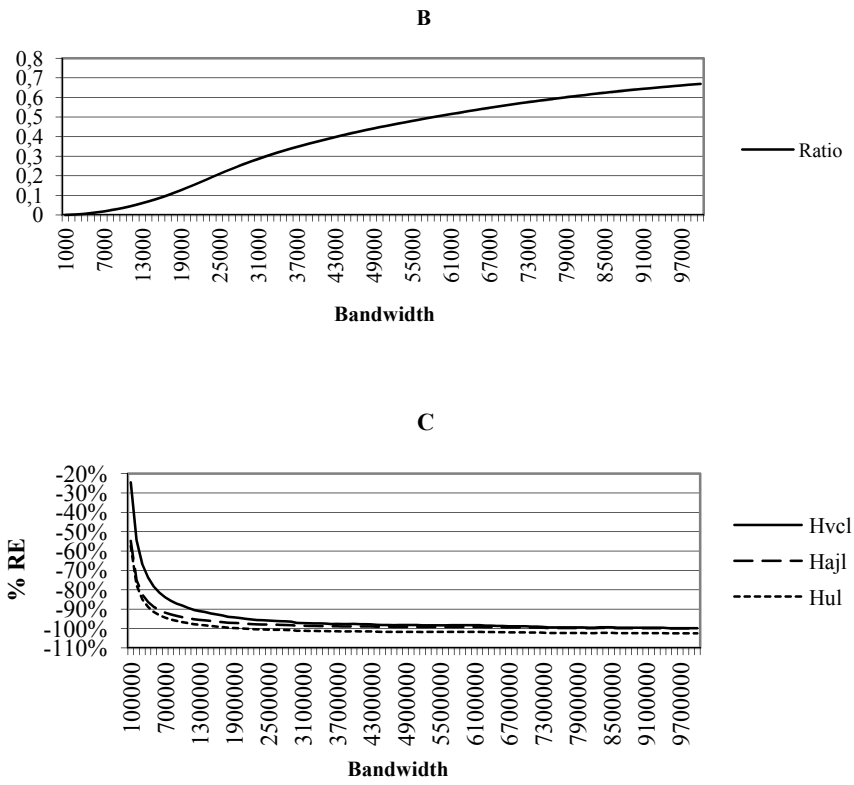
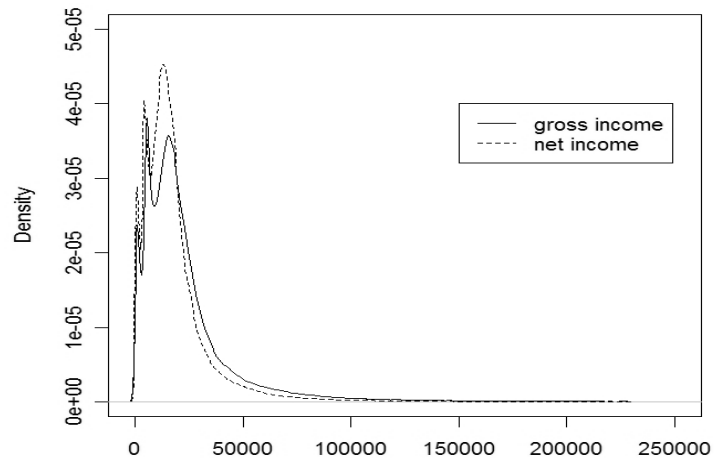
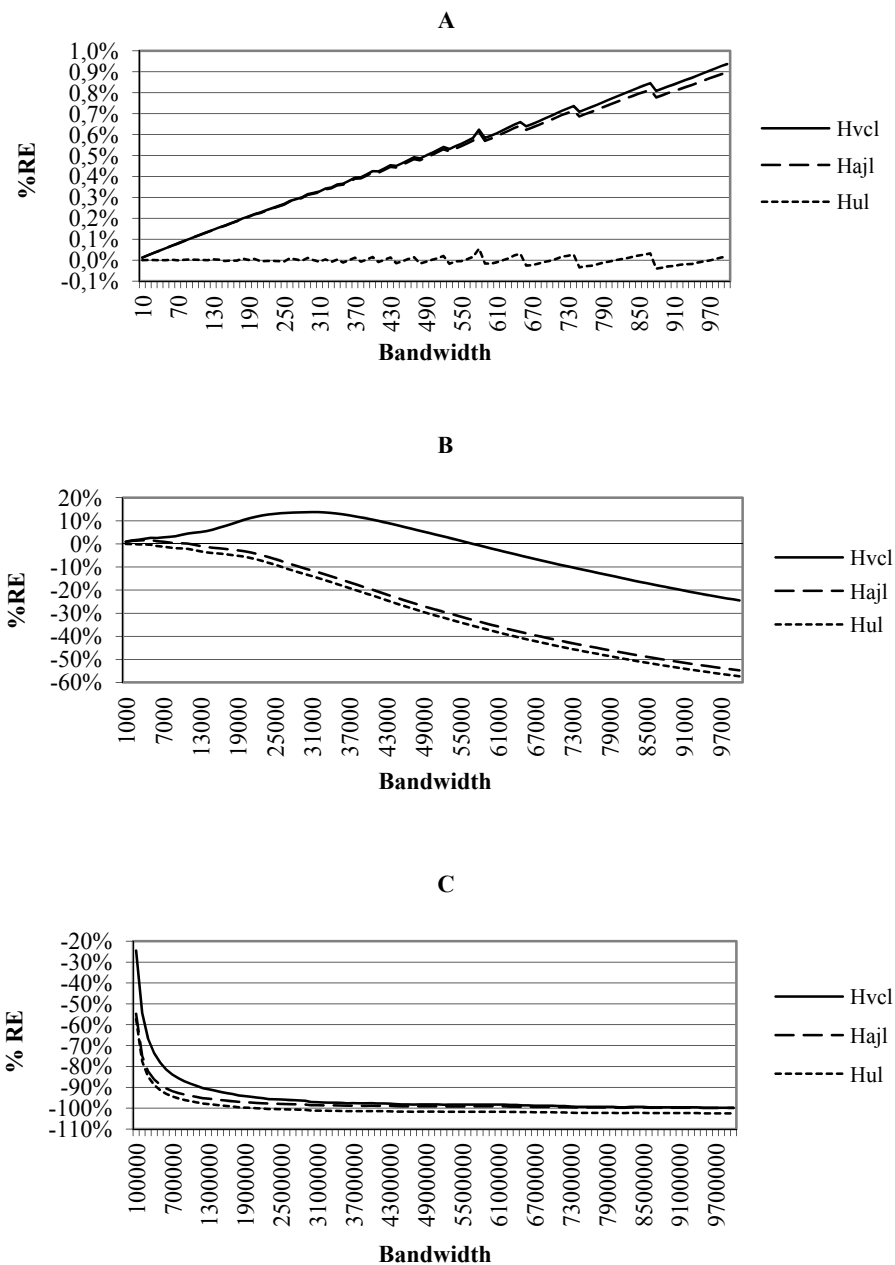


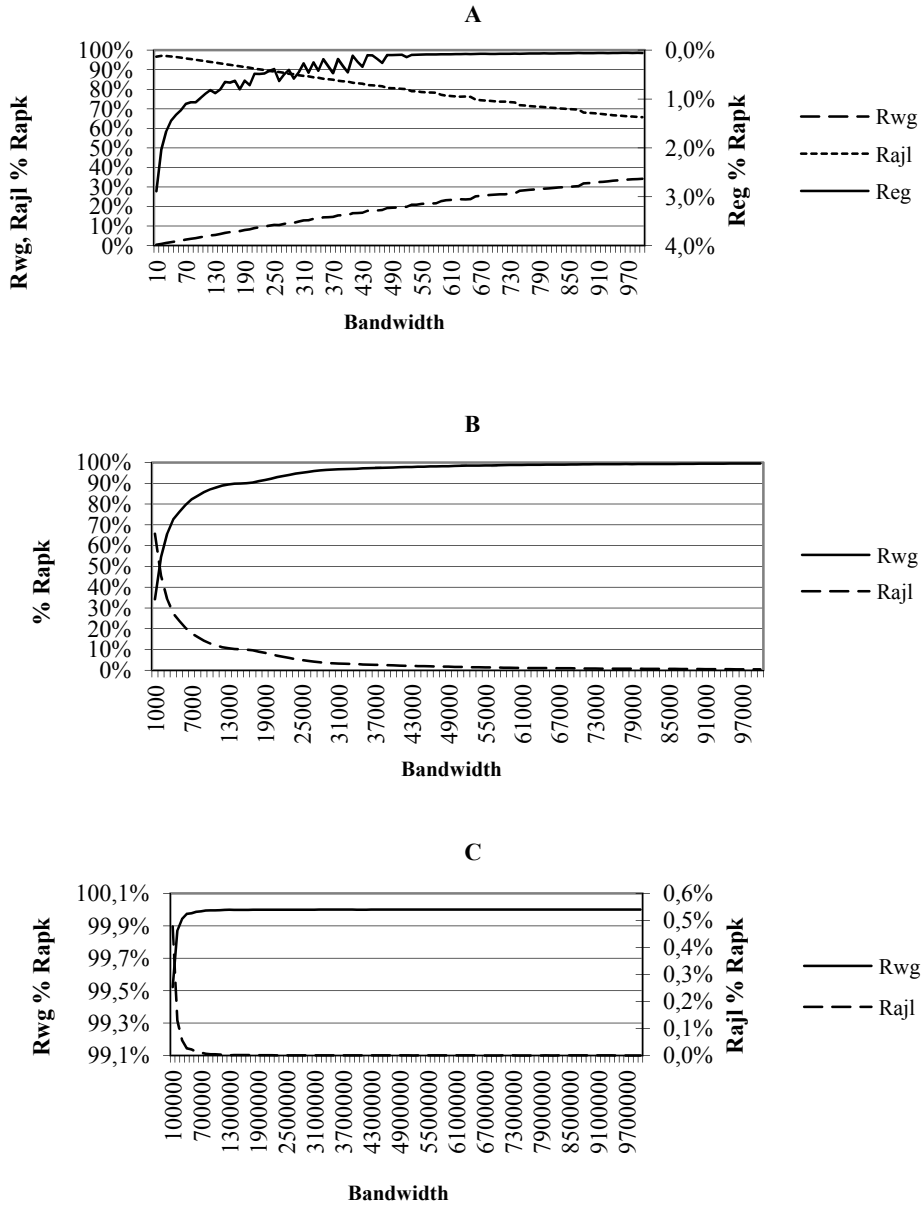
Figure 4: Pre-tax income density function and post-tax income density function. Individuals. 2003.



**Figure 5:** Horizontal effect plotted over different ranges: (A) from 10 euro to 1,000 euro – increasing step 10 euro; (B) from 1,000 euro to 100,000 euro – increasing step 1,000 euro; (C) from 100,000 euro to 10,000,000 euro – increasing step 100,000 euro.



**Figure 6:** Reranking effect plotted over different ranges: (A) from 10 euro to 1,000 euro – increasing step 10 euro; (B) from 1,000 euro to 100,000 euro – increasing step 1,000 euro; (C) from 100,000 euro to 10,000,000 euro – increasing step 100,000 euro.





## Literature

- [1] Aronson R.J., Lambert P.J., (1993), "Inequality decomposition analysis and the Gini coefficient revisited", *The Economic Journal*, 103, pp. 1221–1227.
- [2] Aronson R.J., Lambert P.J., (1994), "Decomposing the Gini coefficient to reveal the vertical, horizontal and reranking effects of income taxation", *National Tax Journal*, 47, pp. 273–294.
- [3] Aronson R.J., Johnson P.J., Lambert P.J., (1994), "Redistributive effect and unequal income tax treatment", *The Economic Journal*, 104, pp. 262–270.
- [4] Atkinson A. B., (1980), "Horizontal equity and the distribution of the tax burden", in *The economics of taxation* Henry J.A. and Boskins M.J. (Eds.), 3–18, Washington, DC: Brookings Institution.
- [5] Dagum C. (1997), "A new approach to the decomposition of Gini income inequality ratio", *Empirical Economics*, 22, pp. 515–531.
- [6] Kakwani N. (1984) "On the measurement of tax progressivity and redistributive effect of taxes with application to horizontal and vertical equity", *Advances in Econometrics*, 3, 149–168.
- [7] Kim K., Lambert P.J., (2008), "Redistributive Effect of U.S. Taxes and Public Transfers, 1994–2004", *Public Finance Review*, 20, n. 10, pp.1–24.
- [8] Plotnick R., (1981), "A measure of horizontal inequity", *Review of Economics and Statistics*, 63, pp.283–287.
- [9] Urban I., Lambert P.J., (2008), "Redistribution, horizontal inequity and reranking: how to measure them properly", *Public Finance Review*, 36, n. 5, pp. 563–587.
- [10] van de Ven J., Creedy J., Lambert P.J., (2001), "Close equals and calculation of the vertical, horizontal and reranking effects of taxation", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 63, 3, pp. 381–394.
- [11] Vernizzi A., Pellegrino S., (2007), "On determining "close equals groups" in decomposing redistributive and reranking effects", *SIEP*, WP 2007–602. Available at <http://ideas.repec.org/p/bep/unimip/1075.html>.

## Streszczenie

### Wybór rozpiętości dochodów w dekompozycji efektu redystrybucji na podstawie analizy danych pochodzących z AMERICA

Wykorzystując dekompozycję efektu redystrybucji dochodów na skutek opodatkowania, należy zdefiniować grupy jednostek charakteryzujących się podobnymi dochodami. W artykule zostały przedstawione sposoby rozwiązania tego problemu proponowane przez różnych autorów. Następnie na podstawie rzeczywistych danych przeprowadzono empiryczną analizę porównawczą proponowanych rozwiązań.



Petr Mazouch  
Savina Finardi  
Jakub Fischer

## **Increasing Level of Education in Selected Central European Countries: a Certain Advantage<sup>1</sup>**

### **1. Introduction**

Increasing of the nation's level of education in any country is an indisputable positive fact. It is obvious that the nation's level of education has a strong impact on the other socio-economic indicators<sup>2</sup>. One of the basic indicators of the nation's level of education is the ratio of the tertiary-educated people. This indicator has two main advantages – it is very simple and comprehensible and it is in principle comparable among countries. Despite of some differences between educational systems in individual countries, the tertiary part of these systems is practically similar (in European area also in consequence of the Bologna Process).

While the ratio of tertiary-educated people is at a level of about 30% in advanced European countries (Belgium 31%, France 25%, Germany 25%, Netherlands 30%, United Kingdom 30%), in transitive countries the ratio is only at the level of about 15% (Czech Republic 13%, Hungary 17%, Poland 17%, Slovakia 14%). In the consequence of the Lisbon Strategy there is a pressure on increasing of the level of this indicator.

On the other hand, there is necessary to analyze the previous development of the ratio of tertiary-educated people in the advanced countries. The process of

---

<sup>1</sup> This paper was prepared under the support of the University of Economics, Prague, project of IGA VSE No. 24/08 "Quantification of public investments on the human capital in the area of the tertiary education and an assessment of the returns on these investments".

<sup>2</sup> E.g., relationship between education and gross value added is analysed in Fischer, Mazouch (2007a), relationship with unemployment rate is published in Mazouch, Fischer (2007a) and an influence of the education level on the life expectancy and the impact on the pension scheme is analysed in Mazouch, Fischer (2007b).

increasing of this ratio had been longstanding and gradual, and was influenced by gradually increasing number of students participating on the tertiary education. It has been also affected by the gradual “dying-cul” of the elder populations with lower education level (what is a natural process leading to a higher average level of education). There is a one common factor for these societies – demographic stability. These countries passed the so-called Second Demographic Revolution, but this process was very different (in contrary to the transitive countries it was much slower) – the consequences of the 2<sup>nd</sup> Demographic Revolution in transitive countries are and will be very strong (from the short-term point of view).

The aim of the paper is to analyze the situation in three transitive countries (The Czech Republic, Slovakia and Poland). What will happen due to the pressure on increasing of the nation’s level of education? What will cause the relation of this fact with the demographic trends in these countries?

## 2. Data and Methodology

It was necessary to find the data source which provides data comparable among analyzed countries. In all three countries the ISCED classification is used, but some statistical statements do not contain detailed data which are required for the analysis. As a main source we used the database of EUROSTAT<sup>3</sup>. We used the data on graduates and on the new enrolled students to tertiary education institutions (level ISCED 5) after a subtracting of graduates and enrolments to level ISCED 5a\_d2 (due to the elimination of duplicities – level ISCED 5a\_d2 contains study programmes following the previous bachelor’s programmes). As a supplementary data sources we used the data from Housing and Population Censuses in the Czech Republic (2001), Slovakia (2001) and Poland (2002) and also the demographic data (number of births) from these countries.

We compare the ratios of graduates with the number of births with a time lag of 22 years (this is an expert estimate of the average age of graduation of the tertiary education at a level ISCED 5 (excluding ISCED 5a\_d2). Number of births was adjusted by the 3-year simple moving average).

As the second step we made a prognosis of the ratio of graduates on time-lagged births. As an assumption we use the stability of the number of new enrolments in the next 3 years (for the Czech Republic according to the internal documents of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic, for the other states as our expert estimate). For the prognosis of the number

---

<sup>3</sup> <http://ec.europa.eu/eurostat>

of graduates we use some coefficients for the time needed for graduation after enrolment (3 years 0.5; 4 years 0.45; 5 years 0.05) and we also computed the longitudinal “successful rate” of studies (graduates to enrolments ratio) as an average ratio from years 1998 – 2006. This ratio is 0.8 for CZ, 0.76 for SK and 0.67 for PL. The prognosis for next 7 years is made from the above mentioned assumptions, the prognosis for further years is made in two alternates – the first one (higher) assumes the constant number of students enrolled to the tertiary studies, the second one (lower) assumes the constant ratio of graduates to time-lagged births.

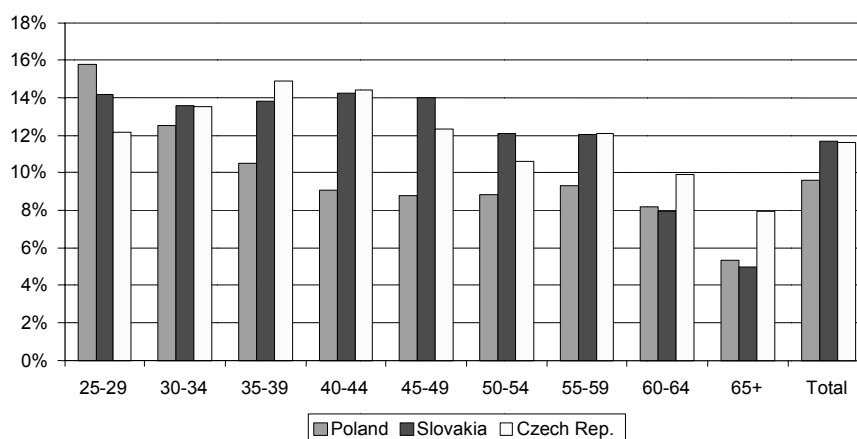
### **3. Results**

Firstly we can see the educational structure of the populations of the analyzed countries (chart 1). The educational structure is quite different between compared countries. While the total average ratio of tertiary-educated people is very similar in the Czech Republic and Slovakia (ca 12%), and in Poland it is quite lower (ca 10%), the countries are different from the point of view of the structure. We can see that Poland have chosen the way of very fast increase of the education level of the youngest population. It is necessary to say that the data on educational structure are from years 2001 and 2002 so they can be quite obsolete. On the other hand, it is very different to obtain the data on the educational structure from the other source than the Housing and Population Census. By the way, it contributes to justification of the necessity of the Census<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> See Fischer, Mazouch (2007b)

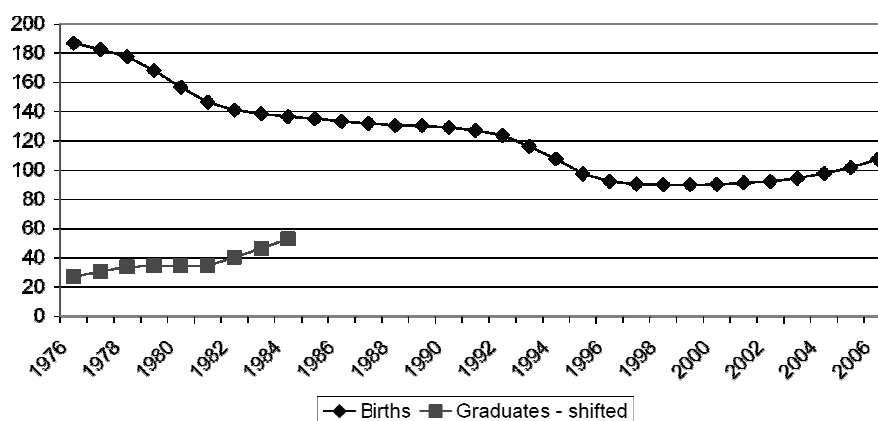
**Chart 1: Age-specific ratio of tertiary-educated  
(CZ, SK 2001, PL 2002)**



Source: Housing and Population Censuses in Czech Republic, Poland, Slovakia (2001, 2002).

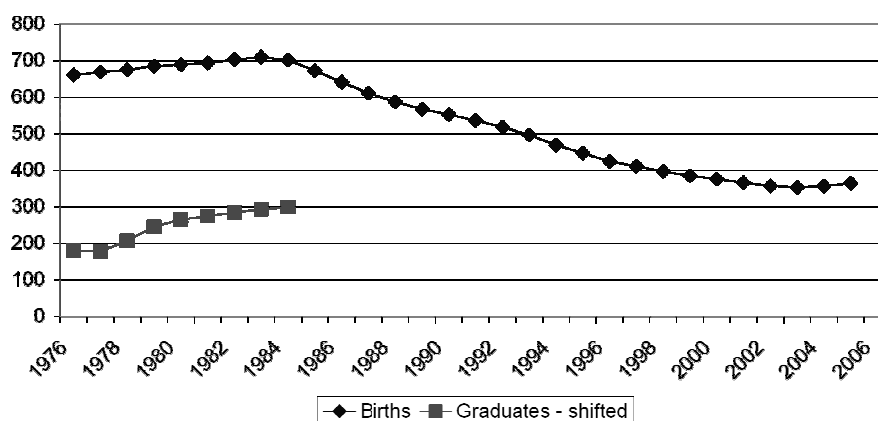
On the next three charts (chart 2 to chart 4) one can see the comparison of the number of births and the number of graduates. The data on graduates are shifted back (of 22 years) so we can compare the trends of births before 22 years and graduates now.

**Chart 2: Number of births and the graduates  
(with a 22-year shift)  
Czech Republic (in thousands)**



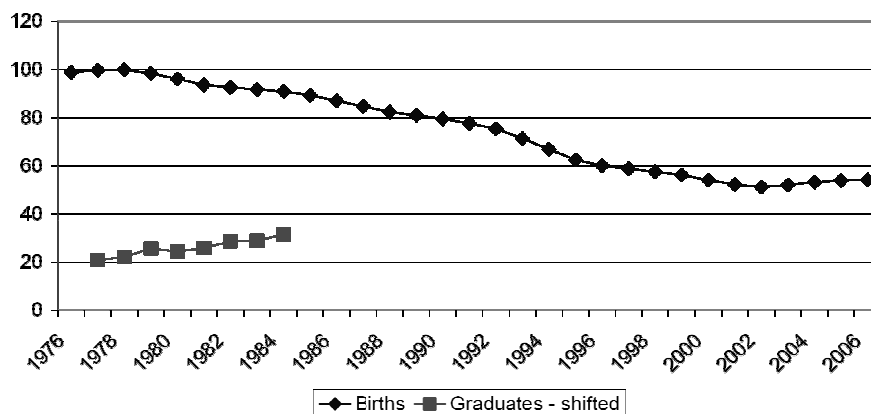
Source: EUROSTAT, demographic data.

**Chart 3: Number of births and the graduates  
(with a 22-year shift)  
Poland (In thousands)**



Source: EUROSTAT, demographic data

**Chart 4: Number of births and the graduates  
(with a 22-year shift)  
Slovakia (in thousands)**



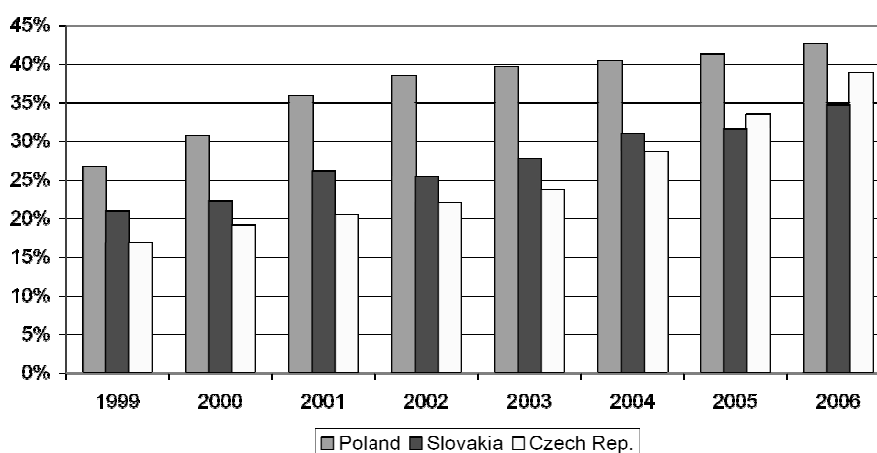
Source: EUROSTAT, demographic data

Using these three charts we can compare different demographic trends in analyzed countries. One can see the decrease in number of births of about 50% from the maximum. While in the Czech Republic the maximum is at the end of

70s, in Slovakia it is at the beginning of 80s and in Poland it is even at the half of 80s. The diminishing process had last about 30 years in Poland while in the Czech Republic the length of decrease had been about 20 years only. It means that *ceteris paribus* this process should be much stronger. One can also see that the change of the trend is the first in the Czech Republic (in comparison with two other countries). We can conclude that the 2<sup>nd</sup> Demographic Revolution is finished in the Czech Republic, while in Slovakia and Poland its consequences persist.

Nevertheless, the main outcome from these charts is common from all countries and is obvious: while the trend of births was decreasing before 22 years, the trend of graduates is opposite. The trend of the ratio of the graduates to shifted births we can see on the chart 5.

**Chart 5: Graduates to births ratio  
(births shifted of 22 years)**



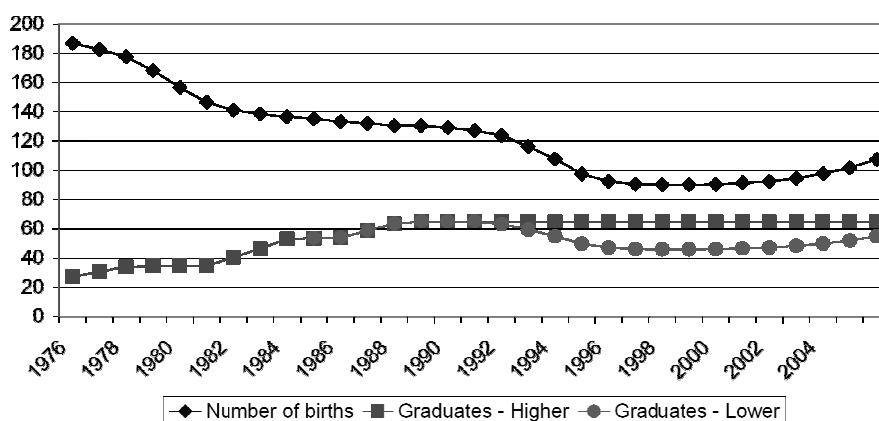
Source: EUROSTAT, demographic data, computations of authors

One can see the strongly increasing trend of this ratio in all three countries. For example, while only 16 percents of the population born in 1977 graduated in the Czech Republic in 1999, during seven years this ratio have risen to nearly 40 percents in 2006.

We can see the prognosis of the number of graduates on the charts 6 to 8. Remember the higher alternate uses the assumption of the constant number of enrolments, the lower alternate assumes the constant enrolments in next three years and then the constant graduates to shifted-birth ratio.

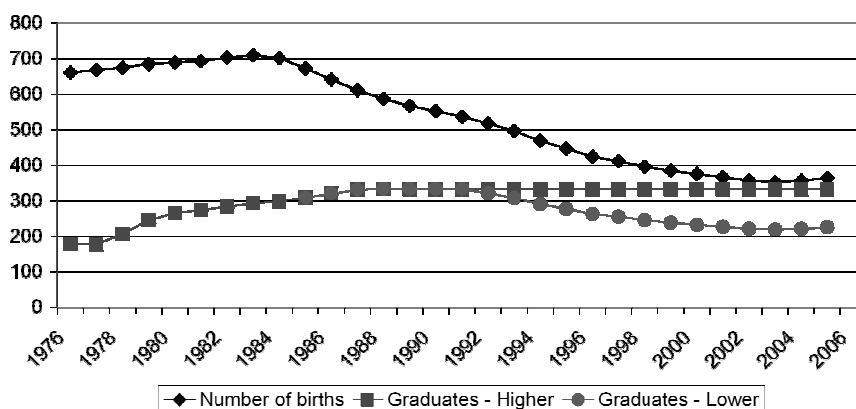


**Chart 6: Number of births and the graduates  
(with a 22-year shift, from 1985 prognosis)  
Czech Republic (In thousands)**



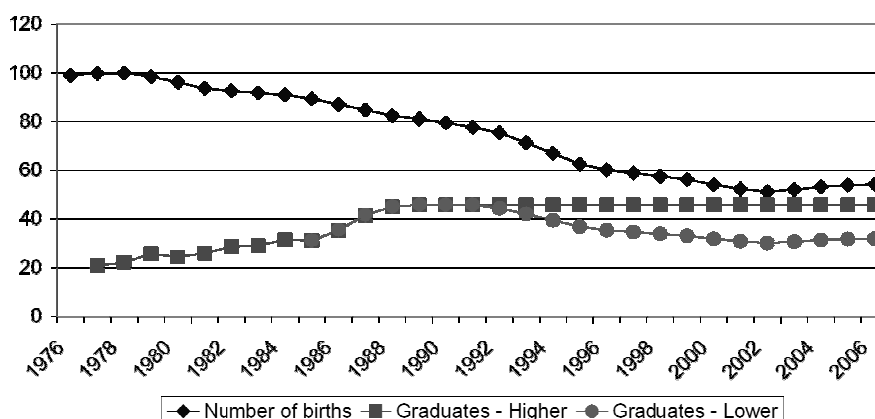
Source: EUROSTAT, demographic data, computations of authors

**Chart 7: Number of births and the graduates  
(with a 22-year shift, from 1985 prognosis)  
Poland (in thousands)**



Source: EUROSTAT, demographic data, computations of authors

**Chart 8: Number of births and the graduates  
(with a 22-year shift, from 1985 prognosis)  
Slovakia (In thousands)**



Source: EUROSTAT, demographic data, computations of authors

Using the higher alternate, the graduates to shifted-birth ratio will almost reach 1 (!). It means that nearly each person born before 22 years will be tertiary educated. It is a nonsense, but on the other hand, the alternate oriented on the sustaining of the above mentioned ratio leads to the important decreasing of the number of graduates (and students) at the tertiary education institutions. It should influence the model of financing of these institutions.

#### 4. Discussion

Our model has some simplifications and expert estimates. Despite this fact the main results of the analysis and prognosis is obvious. The trends in the number of graduates, caused by the pressure on the increasing of the nation's level of educations, are in contrary to the demographic development before ca 20 years. In further years, it will be necessary to decrease the number of enrolled and graduated students at the tertiary education institutions, unless we allow the decreasing quality of tertiary education.

If we want to increase the nation's level of education, we generally have several alternates. Firstly we can increase the number of new enrolled students from the young population. It is relatively easy, but it has some troubles in relation to the demographic situation and trends. The second alternate leads to increasing enrolments in connection to the demographic data. In this case the in-

creasing of the nation's level of education is slower. The third alternate is based on increasing the education at the population in the middle age, including motivation for this sub-population. All these alternates are also related with the task of the tuition fees.

## 5. Conclusion

In the presented paper we analyzed the trends in the tertiary education system in three selected countries in connection with demographic trends in these countries. We conclude the increasing of the nation's level of education should reflect the demographic trends. Without respect of this relation, the quality of the tertiary education could rapidly decrease.

## Literature

- [1] FISCHER, Jakub, MAZOUCH, Petr (2007a). Level of Education and Gross Value Added: Analysis from the Regional Point of View. Poprad 29.08.2007 – 01.09.2007. In: *AMSE [CD-ROM]*. Banská Bystrica: Občianske združenie Financ, 2007, s. 42–46. ISBN 978-80-969535-7-8.
- [2] FISCHER, Jakub, MAZOUCH, Petr (2007b). Popis stanovanj in prebivalstva: anahronizem ali potreba? Radenci 05.11.2007 – 07.11.2007.
- [3] MAZOUCH, Petr, FISCHER, Jakub (2007a). Education Level and Unemployment Rate in Relation to the Business cycle: Experiences from the Czech Republic. Banská Bystrica 15.02.2007. In: *Acta Oeconomica No 21. [CD-ROM]*. Banská Bystrica: Universita Mateje Bela, 2007, s. 1–6. ISBN 978-80-8083-407-4.
- [4] MAZOUCH, Petr, FISCHER, Jakub (2007b). Longer Life Caused by Higher Attained Level of Education: How to Value this Advantage. Lisabon 22.08.2007 – 29.08.2007. In: *Bulletin of the International Statistical Institute 56th Session – ISI 2007 [CD-ROM]*. Lisabon: International Statistical Institute, 2007, s. 1–4.
- [5] *OECD*. Education at a Glance 2007. ISBN 978-92-64-03287-3.

## **Streszczenie**

### **Rosnący poziom edukacyjny w wybranych krajach Europy Centralnej – czy to korzystne?**

Celem tego artykułu jest porównanie trendów kształcenia młodzieży na trzecim stopniu edukacyjnym w Czechach, Słowacji i Polsce, w kontekście ogólnych trendów demograficznych.

Dość szybki wzrost współczynnika liczby studentów do ogólnej liczby mieszkańców może spowodować problemy dotyczące nadmiaru ludzi wykształconych. Ponadto znaczny wzrost liczby studentów może powodować spadek jakości kształcenia.